

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

PERMUTATIONS MINIMALES ET MAXIMALES DANS UN  
TAPIS

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

ABDELHAFID CHEKKAL

JUIN 2006

# UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

Service des bibliothèques

## Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 -Rév.01-2006). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article **11** du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

*À mon père, ma chère mère, mes frères et mes soeurs*

*À ma chère femme*

*À mes chères petites filles **Amina et Sarah***

*À toute ma famille*

*À mon chère ami **R. Zerouati***

*À tous mes amis*

*À toutes les personnes qui m'ont soutenu*

## REMERCIEMENTS

Je remercie tout d'abord le professeur Christophe Reutenauer, mon directeur de recherche, qui m'a proposé ce sujet de recherche, pour le suivi constant qu'il m'a apporté tout au long de la réalisation de ce travail. En effet, je lui suis très redevable de m'avoir supervisé et surtout pour les lectures essentielles à l'aboutissement de cette recherche. Je tiens à lui exprimer ma profonde reconnaissance.

Je suis très sensible à l'honneur que m'ont fait Messieurs le professeur François Bergeron et le professeur Alain Goubil en acceptant de corriger ce travail de recherche. Qu'ils trouvent ici mes remerciements les plus sincères.

Je voudrais aussi remercier tous les enseignants qui m'ont encadré.

Je tiens à remercier mes parents, ma famille et mon ami Rabah qui m'ont grandement soutenu et encouragé constamment à réaliser mes rêves d'accomplir mes études supérieures.

Ma reconnaissance s'étend au personnel de l'université du Québec à Montréal.

Enfin, je remercie tous ceux qui m'ont soutenu et encouragé.

## TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES . . . . .	v
LISTE DES SYMBOLES . . . . .	viii
RÉSUMÉ . . . . .	xi
INTRODUCTION . . . . .	1
CHAPITRE I	
NOTIONS PRÉLIMINAIRES . . . . .	5
1.1 Diagrammes de Ferrers et partages . . . . .	5
1.2 Tableaux de Young . . . . .	12
1.3 Formule des équerres . . . . .	15
1.4 Permutations et inversions . . . . .	19
1.5 Diagramme de Rothe d'une permutation et le nombre d'inversions . . . . .	23
1.6 Représentations du groupe symétrique . . . . .	27
CHAPITRE II	
CORRESPONDANCE DE ROBINSON-SCHENSTED. . . . .	46
2.1 Algorithme d'insertion . . . . .	47
2.2 Algorithme de suppression . . . . .	53
2.3 Algorithme de Robinson-Schensted . . . . .	56
2.4 Algorithme de suppression du plus petit élément . . . . .	79
2.5 Algorithme de " vidage-remplissage " . . . . .	85
CHAPITRE III	
CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE DE VIENNOT. . . . .	100
3.1 Squelette d'une permutation . . . . .	100
3.2 Squelette et correspondance de Robinson-Schensted . . . . .	114
3.3 Correspondance de Viennot . . . . .	119
3.4 Quelques applications . . . . .	127
CHAPITRE IV	
PERMUTATIONS MINIMALES DANS UN TAPIS D'APRÈS HAN. . . . .	130

4.1 Définitions et identités de base . . . . .	130
4.2 Théorème principal . . . . .	140
4.3 Démonstration du théorème principal . . . . .	145
CHAPITRE V	
PERMUTATIONS MINIMALES ET MAXIMALES DANS UN TAPIS D'APRÈS HOHLWEG. . . . .	151
5.1 Sous-groupes de Young et tableaux lisibles par colonnes . . . . .	152
5.2 Théorème principal . . . . .	162
5.3 Conséquences du résultat principal . . . . .	177
5.4 Démonstration du théorème principal . . . . .	181
CHAPITRE VI	
PERMUTATIONS MAXIMALES DANS UN TAPIS. . . . .	190
6.1 Définitions et identités de base . . . . .	190
6.2 Théorème principal . . . . .	192
6.3 Démonstration du théorème principal . . . . .	197
CONCLUSION . . . . .	203
BIBLIOGRAPHIE . . . . .	205

## LISTE DES FIGURES

1.1	Transformation d'un diagramme de Ferrers par la symétrie par rapport à la première bissectrice. . . . .	12
1.2	La permutation $\sigma = 6341725$ représentée par un graphe biparti. . . . .	19
1.3	Permutoèdre d'ordre 3. . . . .	23
1.4	L'opération qu'il convient d'effectuer pour chaque inversion de $\sigma$ pour obtenir son diagramme de Rothe. . . . .	25
1.5	Le graphe et le diagramme de Rothe de la permutation $\sigma = 3641725$ de $\mathcal{S}_7$ . .	25
1.6	Le graphe et le diagramme de Rothe de la permutation inverse $\sigma^{-1} = 4613725$ de $\mathcal{S}_7$ . . . . .	26
1.7	L'équerre dont le point $P_5 = (5, 7)$ est le coin. . . . .	26
1.8	Toutes les équerres dont les points du graphe de la permutation $\sigma = 3641725$ de $\mathcal{S}_7$ sont les coins. . . . .	27
2.1	Le tableau $P$ avec des zéros sur les bords en bas et à gauche et des $+\infty$ en haut et à droite. . . . .	49
3.1	$\hat{\sigma} = \{(1, 3), (2, 6), (3, 4), (4, 1), (5, 7), (6, 2), (7, 5)\}$ . . . . .	100
3.2	$\text{Supp}(\tau) = \{1, 2, 4\} \times \{1, 2, 5\}$ . . . . .	101
3.3	L'ombre $O_g^-((4, 6))$ . . . . .	103
3.4	L'ombre $O_d^-((4, 6))$ . . . . .	104

3.5	L'ombre $O_g^+((4, 6))$ . . . . .	104
3.6	L'ombre $O_d^+((4, 6))$ . . . . .	105
3.7	Les points saillants $(1, 3)$ et $(4, 1)$ . . . . .	106
3.8	La ligne saillante $L(\tau)$ . . . . .	107
3.9	Les ensembles $S_g^-(L)$ et $S_d^+(L)$ . . . . .	108
3.10	Les lignes saillantes associées à la permutation $\sigma = 3641725$ . . . . .	110
3.11	$Sq_g^-(\sigma) = 0063047$ . . . . .	111
3.12	$Sq_d^+(\sigma) = 1420500$ . . . . .	111
3.13	$Sq_g^+(\sigma) = 0300614$ . . . . .	112
3.14	$Sq_d^-(\sigma) = 4072050$ . . . . .	112
3.15	$\sigma = Sq_d^+(Sq(\sigma) \cup \{x_1, \dots, x_k\} \cup \{y_1, \dots, y_k\})$ . . . . .	113
3.16	Les lignes saillantes associées à $Sq(\sigma)$ et à $Sq^2(\sigma)$ où $\sigma = 3641725$ . . . . .	116
3.17	Les lignes saillantes associées à $\{Sq^k(\sigma) \mid k \geq 0\}$ où $\sigma = 3641725$ . . . . .	122
3.18	$\alpha(\sigma) = 1122132$ . . . . .	123
3.19	$\beta(\sigma) = 1123122$ . . . . .	124
3.20	La suite croissante $(3, 4, 7)$ . . . . .	128
3.21	La suite décroissante $(6, 4, 2)$ . . . . .	129
4.1	Squelettes successifs de $\sigma$ . . . . .	141
4.2	Le diagramme de Rothe d'une permutation et le nombre d'inversions. . . . .	144
4.3	Comparaison entre $SB(\sigma)$ et $Rot(\sigma)$ . . . . .	145



4.4	Analyse des points non-saillants. . . . .	146
4.5	Points de $Rot(\sigma)$ dans la région $a$ . . . . .	148
4.6	Points de $SB(\sigma)$ dans la région $a$ . . . . .	149
4.7	Représentation planaire de $Sq^*(\sigma_{(5,4,3,1,9)})$ . . . . .	150
5.1	$(\lambda')^t$ peut être obtenu de $\lambda^t$ en supprimant la part $i$ . . . . .	162
6.1	Les squelettes successifs supérieurs gauches de $\sigma$ . . . . .	193
6.2	Le diagramme de R��the d'une permutation et le nombre d'inversions. . . . .	195
6.3	L'ensemble $\Gamma(\sigma)$ . . . . .	196
6.4	Comparaison entre $SB(\sigma)$ et $Rot(\sigma)$ . . . . .	197
6.5	Analyse des points non-saillants. . . . .	198

## LISTE DES SYMBOLES

$\mathbb{C}$	l'ensemble des nombres complexes
$c = (c_1, \dots, c_k)$	une composition de l'entier $n$
$\mathfrak{D}_n$	l'ensemble des tableaux de Young standards à $n$ éléments
$\mathfrak{D}_n(\lambda)$	l'ensemble des tableaux de Young standards à $n$ éléments de forme $\lambda$
$f_\lambda$	le nombre de tableaux de Young standards de forme $\lambda$
$G$	un groupe fini
$GL(n, \mathbb{C})$	le groupe linéaire général complexe de degré $n$
$\text{inv}(\sigma)$	le nombre d'inversions de la permutation $\sigma$
$\ell(\sigma)$	la longueur de la permutation $\sigma$ , i.e. le nombre d'inversions de $\sigma$
$\mathbb{N}$	l'ensemble des entiers naturels
$n$	un entier naturel
$[n]$	l'ensemble $\{1, \dots, n\}$
$n(\lambda)$	$= \sum_{i=1}^p \binom{\lambda_i}{2}$
$P(\sigma)$	le $P$ -symbole de la permutation $\sigma$
$P^T$	le tableau $P$ transposé
$P \longleftarrow x$	le tableau obtenu par insertion (insertion ligne) de l'élément $x$ dans le tableau $P$
$P_{V.R}$	le tableau obtenu de $P$ en appliquant l'algorithme de "vidage-remplissage"
$\mathbb{Q}$	l'ensemble des nombres rationnels
$Q(\sigma)$	le $Q$ -symbole de la permutation $\sigma$

$\mathbb{R}$	l'ensemble des nombres réels
$Rot(\sigma)$	le diagramme de Rothe de la permutation $\sigma$
$\mathcal{S}_n$	le groupe symétrique à $n$ éléments
$\mathcal{S}_\lambda$	le sous-groupe de Young de $\mathcal{S}_n$ associé au partage $\lambda$
$\mathcal{T}^\lambda$	la cellule bilatère associée au partage $\lambda$ , i.e. le tapis constitué de toutes les permutations de $\mathcal{S}_n$ de forme $\lambda$
$\mathcal{T}_{\min}^\lambda$	l'ensemble des éléments de $\mathcal{T}^\lambda$ de longueur minimale
$\mathcal{T}_{\max}^\lambda$	l'ensemble des éléments de $\mathcal{T}^\lambda$ de longueur maximale
$V$	un espace vectoriel de dimension finie
$x \longrightarrow P$	le tableau obtenu par inserion (insertion colonne) de l'élément $x$ dans le tableau $P$
$\mathbb{Z}$	l'ensemble des entiers relatifs
$\Delta P$	le tableau obtenu de $P$ en appliquant l'algorithme de suppression du plus petit élément
$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \vdash n$	$\lambda$ est un partage de l'entier $n$
$\lambda^t = (\lambda_1^t, \dots, \lambda_k^t)$	le partage conjugué de $\lambda$
$\lambda(c)$	l'unique partage de $n$ obtenu en réarrangeant les $c_i$ en ordre décroissant
$\pi$	correspondance de Robinson-Schensted
$\pi^{-1}$	correspondance inverse de Robinson-Schensted
$\sigma = x_1 \dots x_n$	une permutation de $\mathcal{S}_n$ vue comme un mot en les lettres $1, \dots, n$
$\sigma_c$	la permutation de longueur maximale dans le sous-groupe de Young $\mathcal{S}_c$
$\sigma^{-1}$	l'inverse de la permutation $\sigma$
$\sigma^* = x_n \dots x_1$	l'image miroir de la permutation $\sigma$
$\sigma_i = (i, i+1)$	une transposition élémentaire

$\sigma_T = \pi^{-1}(T, T)$	l'involution obtenue de la paire de tableaux $(T, T)$ par la correspondance inverse de Robinson-Schensted
$\leq$	l'ordre naturel dans le plan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
$\leq_C$	l'ordre croisé dans le plan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

## RÉSUMÉ

La correspondance de Robinson-Schensted envoie une permutation sur une paire de tableaux de Young standards de même forme. La forme de ces deux tableaux est aussi appelée forme de la permutation. Récemment, à l'aide de la théorie de Kazhdan-Lusztig, Hohlweg a caractérisé les permutations ayant le nombre d'inversions minimal et celles ayant le nombre d'inversions maximal dans un tapis qui est l'ensemble des permutations de forme fixée. Guo-Niu Han (2004) a montré, par un argument combinatoire, que la caractérisation de Hohlweg pour les permutations minimales dans un tapis est une conséquence de l'algorithme géométrique que Viennot (1976) avait construit pour la correspondance de Robinson-Schensted. Dans ce mémoire, on montre, par un argument combinatoire très similaire à celui de Guo-Niu Han, que la caractérisation de Hohlweg pour les permutations maximales est aussi une conséquence de l'algorithme géométrique de Viennot. Cette construction, qui est une variante de celle de Han, est originale.

Mots clés : Partages, diagrammes de Ferrers, tableaux de Young standards, formule des équerres, inversions et diagramme de Rothe d'une permutation, représentations du groupe symétrique, correspondance de Robinson-Schensted, construction de Viennot, cellules bilatères de Kazhdan-Lusztig dans le groupe symétrique, sous-groupes de Young, tableaux lisibles par colonnes, Permutations minimales, Permutations maximales.

## INTRODUCTION

En 1938, Robinson a introduit un algorithme permettant d'associer de manière bijective à toute permutation  $\sigma = x_1 x_2 \dots x_n$  une paire  $(P, Q)$  de tableaux de Young standards de même forme sur  $n$  éléments. Cette bijection, notée

$$\sigma \mapsto (P(\sigma), Q(\sigma)),$$

est redécouverte, autour des années soixante, sous une forme un peu différente par Schensted. Elle permet de démontrer combinatoirement l'identité

$$n! = \sum_{\lambda} (f_{\lambda})^2,$$

où la somme du second membre est étendue à tous les partages  $\lambda$  de l'entier  $n$ , et où  $f_{\lambda}$  désigne à la fois le degré et la multiplicité de la représentation irréductible du groupe symétrique  $\mathcal{S}_n$ , sur le corps des complexes, associée au partage  $\lambda$ . Cette bijection est maintenant devenue classique sous le nom de correspondance de Robinson-Schensted. Elle fut l'objet d'une étude approfondie et diverses propriétés combinatoires spectaculaires ont été mises en évidence depuis. Deux des propriétés les plus étonnantes sont certainement celles, découvertes par Schützenberger, concernant la caractérisation des multiples liens entre les paires de tableaux associés à une permutation, l'inverse et l'image miroir de cette permutation. Pour la permutation  $\sigma^{-1}$  (l'inverse de  $\sigma$ ) et la permutation  $\sigma^*$  (l'image miroir de  $\sigma$ ), la correspondance associe respectivement les couples de tableaux  $(Q(\sigma), P(\sigma))$  et  $(P^T(\sigma), Q_{V.R}^T(\sigma))$  où  $P^T(\sigma)$  est le tableau  $P(\sigma)$  transposé et  $Q_{V.R}^T(\sigma)$  est obtenu de  $Q(\sigma)$  par transposition et en appliquant l'algorithme connu sous le nom de "vidage-remplissage", également dû à Schützenberger. Autrement dit

$$(P(\sigma^{-1}), Q(\sigma^{-1})) = (Q(\sigma), P(\sigma))$$

et

$$(P(\sigma^*), Q(\sigma^*)) = (P^T(\sigma), Q_{V.R}^T(\sigma)).$$

Plus tard, Viennot a donné une version géométrique de cette correspondance. Pour ceci, il a associé à toute permutation  $\sigma$  de  $\mathcal{S}_n$  sa représentation plane  $\hat{\sigma}$ , i.e. l'ensemble des points  $(i, \sigma(i))$  du plan entier  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . En imaginant que le plan est "éclairé" par le coin inférieur gauche, il a défini certaines "zones d'ombres" des points de  $\hat{\sigma}$ , dont les intersections permettent de définir le squelette d'une permutation. Celui-ci n'est qu'une certaine configuration de points de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  qui caractérise la permutation. Il a montré que l'algorithme de Robinson-Schensted revient à prendre les squelettes itérés de la permutation  $\sigma$ ; plus précisément, il a établi une bijection entre le groupe  $\mathcal{S}_n$  et les paires de mots de Yamanouchi de longueur  $n$  ne contenant pas la lettre 0 qui sont réarrangement l'un de l'autre. Il a montré que cette bijection est identique à celle donnée par l'algorithme de Robinson-Schensted en utilisant le fait que la notion de mot de Yamanouchi est un certain codage des tableaux de Young standards. Cette version géométrique a été une nouvelle approche, qui fournit un cadre naturel à toutes les propriétés classiques de la correspondance de Robinson-Schensted. Elle a permis de mieux comprendre certaines propriétés en particulier celle concernant une permutation et son inverse découverte par Schützenberger et celle concernant la longueur maximale des suites croissantes et décroissantes extraites d'une permutation découverte par Schensted.

À l'aide de la théorie de Kazhdan-Lusztig, Hohlweg a caractérisé les permutations ayant le nombre d'inversions minimal sur l'ensemble des permutations de forme fixée (la correspondance de Robinson-Schensted envoie une permutation sur une paire de tableaux de Young standards de même forme; la forme de ces deux tableaux est aussi appelée forme de la permutation). Il a montré que l'ensemble de ces permutations est l'ensemble des permutations qui ont un nombre d'inversions maximal dans les sous-groupes de Young conjugués. Plus précisément, à toute composition  $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$  de  $n$ , il a associé une permutation  $\sigma_c = \sigma_c(1) \sigma_c(2) \dots \sigma_c(n)$ , de longueur  $n$ , définie comme le produit de juxtaposition  $\sigma_c = w_1 w_2 \dots w_k$  avec

$$w_j = u_j(u_j - 1) \dots (u_{j-1} + 2)(u_{j-1} + 1)$$

où  $u_j = c_1 + c_2 + \dots + c_j$  (on peut vérifier que  $\sigma_c$ , vue comme l'application  $i \mapsto \sigma_c(i)$  ( $1 \leq i \leq n$ ), est une involution). En considérant un partage  $\lambda$  et son conjugué  $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_k)$ ,

il a montré que l'ensemble des permutations minimales de forme  $\lambda$  est l'ensemble de toutes les involutions  $\sigma_c$ , où  $c$  est un réarrangement de  $\lambda^t = (\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_k)$ . Il a aussi donné une interprétation de cet ensemble en utilisant des tableaux particuliers ainsi que l'ensemble des permutations ayant le nombre d'inversions maximal sur l'ensemble des permutations de forme fixée. Le résultat de Hohlweg est le premier résultat qui relie la correspondance de Robinson-Schensted avec la longueur d'une permutation (le nombre d'inversions). La preuve donnée n'est cependant pas combinatoire.

Guo-Niu Han a montré, par un argument purement combinatoire, que la caractérisation de Hohlweg est une conséquence de l'algorithme géométrique que Viennot avait construit pour la correspondance de Robinson-Schensted.

Le plan de notre travail est le suivant :

Les permutations minimales sont le thème principal de ce travail. Notre étude s'appuie essentiellement sur l'article intitulé "Note on the minimal permutations" publié en 2004 par Guo-Niu Han à l'Institut de Recherche Mathématique Avancée de l'Université Louis Pasteur à Strasbourg en France.

Notre travail consiste principalement à comprendre le contenu de cet article. Nous avons systématiquement essayé de reprendre toutes les démonstrations en les détaillant afin de les rendre plus claires. Nous avons en particulier suppléé les détails des preuves brièvement données ou omises.

Le chapitre 1 se veut un résumé des résultats connus et utilisés dans ce travail. Les tableaux de Young standards trouvent une place prépondérante dans la première partie où nous mentionnons la formule des équerres

$$f_\lambda = \frac{n!}{\prod_x h_x},$$

donnant le nombre de tableaux de Young standards d'une forme donnée. Nous donnons des rappels sur les permutations et en particulier les inversions et le diagramme de Rothe d'une permutation qui permet de visualiser les inversions. Finalement, nous donnons des rappels sur



les différentes représentations des permutations.

Dans le chapitre 2, nous rappelons l'algorithme de Robinson-Schensted ainsi que ses multiples propriétés. Il existe plusieurs versions de cet algorithme ; nous donnons celle utilisant l'insertion ligne. Nous donnons également un résultat concernant le nombre de tableaux de Young standards ayant  $n$  cellules. Cette classe de tableaux est en bijection avec les involutions sur  $n$  points.

Dans le chapitre 3, nous donnons la description complète de l'algorithme de Viennot ainsi que son explication naturelle pour quelques propriétés de la correspondance de Robinson-Schensted.

Dans le chapitre 4, nous donnons la preuve combinatoire de Guo-Niu Han du résultat principal de Hohlweg qui caractérise les permutations ayant le nombre d'inversions minimal sur l'ensemble des permutations de forme fixée ; cette preuve est déduite de l'algorithme géométrique de Viennot.

Dans le chapitre 5, nous donnons la preuve algébrique de Hohlweg de son résultat principal pour les permutations minimales ; cette preuve s'appuie sur la théorie de Kazhdan-Lusztig (que nous admettrons). Nous donnons aussi quelques corollaires.

Dans le chapitre 6, nous montrons, par un argument combinatoire très similaire à celui de Guo-Niu Han, que la caractérisation de Hohlweg pour les permutations maximales est aussi une conséquence de l'algorithme géométrique de Viennot. Notons que cette construction, qui est une variante de celle de Han, est originale.

Dans ce mémoire, nous suivons, pour ce qui est des généralités des trois premiers chapitres, divers ouvrages : les notes de cours de François Bergeron, le livre de Bruce Sagan, les notes de cours de Daniel Krob et l'article de Viennot.

## CHAPITRE I

### NOTIONS PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, nous suivons les notes de cours de François Bergeron, le livre de Bruce Sagan et les notes de cours de Daniel Kroh.

Dans toute la suite de ce travail, nous considérons dans le plan  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  la relation d'ordre suivante :

*l'ordre naturel*  $\leq$  défini pour tous  $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  par :

$$(x, y) \leq (x', y') \text{ si et seulement si } x \leq x' \text{ et } y \leq y'.$$

#### 1.1 Diagrammes de Ferrers et partages

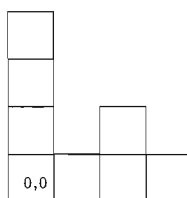
##### Définition 1.1

*Un diagramme est un ensemble fini  $d \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  et une case (ou une cellule) de  $d$  est, tout simplement, l'un des éléments de  $d$ .*

On représente habituellement la case  $(i, j) \in d$  au moyen du carré  $1 \times 1$  de sommets  $(i, j)$ ,  $(i + 1, j)$ ,  $(i, j + 1)$  et  $(i + 1, j + 1)$  dans le quadrant  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ . Ainsi le diagramme

$$\{(0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0), (0, 1), (2, 1), (0, 2), (0, 3)\}$$

est représenté par le dessin

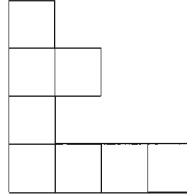


**Définition 1.2**

Le diagramme conjugué,  $d'$ , d'un diagramme  $d$  est l'ensemble

$$d' := \{(j, i) \mid (i, j) \in d\}.$$

Le conjugué du diagramme ci-haut est

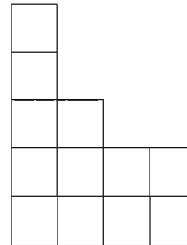


La conjugaison est clairement une involution, i.e.  $d'' = d$ .

**Définition 1.3**

Un diagramme  $\lambda$  est dit de Ferrers si pour tout  $(i, j) \in \lambda$ , chaque case  $(a, b)$  avec  $(a, b) \leq (i, j)$  est aussi dans  $\lambda$ .

Ainsi, un diagramme  $\lambda$  est dit de Ferrers s'il est en "forme d'escalier", comme par exemple



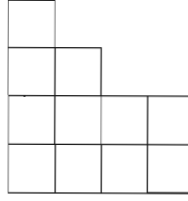
Autrement dit, pour chaque case  $(i, j)$  dans  $\lambda$ , toutes les cases à gauche et sous  $(i, j)$  sont aussi dans  $\lambda$ .

**Définition 1.4**

Un partage  $\lambda \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  est un diagramme tel que

$$(i, j) \in \lambda \text{ et } (a, b) \leq (i, j) \text{ impliquent que } (a, b) \in \lambda.$$

En d'autres mots, un partage est un diagramme de Ferrers. Par exemple, on a le partage



Rappelons que si  $(E, \leq)$  est un ensemble ordonné et  $I \subseteq E$ , alors  $I$  est un *idéal inférieur* si

$$\forall i \in I, \forall e \in E : e \leq i \Rightarrow e \in I.$$

Donc un partage est un idéal inférieur pour l'ensemble  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  muni de l'ordre naturel défini ci-dessus.

Les parts  $\lambda_i$  de  $\lambda$  sont les entiers

$$\lambda_i := |\{c \in \lambda \mid \exists x \in \mathbb{N} : c = (x, i - 1)\}|.$$

Pour les  $i$  tels que  $\lambda_i > 0$ , on a clairement  $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$ . Un partage étant caractérisé par la taille de ses parts, on peut identifier  $\lambda$  à la liste de ses parts  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$  ou simplement  $\lambda = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k$ . Pour l'exemple ci-dessus, on a  $\lambda = 4421$ . De plus, si  $\lambda$  a  $d_i$  parts de taille  $i$ , on écrit encore  $\lambda = 1^{d_1} 2^{d_2} \dots n^{d_n}$ . On dit alors que  $d_i$  est la multiplicité de la part  $i$  dans  $\lambda$ . Pour notre exemple courant, on a  $\lambda = 1^1 2^1 4^2$ . Les parts de  $\lambda$  sont encore appelées lignes de  $\lambda$ . De même, les colonnes de  $\lambda$  sont les lignes de son conjugué  $\lambda'$

$$\lambda'_i = |\{c \in \lambda \mid \exists x \in \mathbb{N} : c = (i - 1, x)\}|.$$

La hauteur (ou longueur)  $\ell(\lambda)$  de  $\lambda$  est le plus grand entier  $k$  tel que  $\lambda_k \neq 0$ , c'est donc le nombre des parts de  $\lambda$ . Le partage 4421 a hauteur 4.

Si le nombre total de cases de  $\lambda$  est

$$n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k,$$

on dit que  $\lambda$  est un partage de  $n$  et on écrit  $\lambda \vdash n$ . Ainsi, on peut donner la définition suivante :

### Définition 1.5

Un partage  $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k > 0)$  d'un entier  $n$  est une suite décroissante d'entiers strictement positifs dont la somme donne  $n$ .

Chaque partage a une représentation planaire qui est un diagramme de Ferrers. Nous allons utiliser le même symbole pour un partage de  $n$  et pour le diagramme de Ferrers qui lui est associé. On utilise souvent la notation  $|\lambda| = \sum_i \lambda_i$  ; ainsi si  $\lambda$  est un partage de  $n$ ,  $|\lambda| = n$ .

Pour tout partage  $\lambda$  (Macdonald, 95), nous définissons

$$n(\lambda) = \sum_{i \geq 1} (i-1) \lambda_i ;$$

ainsi chaque  $n(\lambda)$  est la somme des nombres obtenus en remplissant chaque case dans la première ligne par un 0, chaque case dans la deuxième ligne par un 1 et en général chaque case dans la  $i^{\text{ème}}$  ligne par  $(i-1)$ . En additionnant ces nombres dans chaque colonne on voit que

$$n(\lambda) = \sum_{i \geq 1} \binom{\lambda'_i}{2}.$$

Par exemple pour  $\lambda = 43321$ , un partage de 13, on obtient

$$\begin{aligned} n(\lambda) &= 0 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \\ &= 19. \end{aligned}$$

Remarquons que 19 est la somme des entrées du tableau suivant

4			
3	3		
2	2	2	
1	1	1	
0	0	0	0

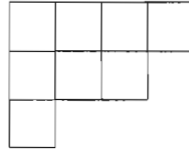
Remarquons aussi que  $\lambda' = 5431$  et que

$$\begin{aligned} 19 &= \binom{5}{2} + \binom{4}{2} + \binom{3}{2} + \binom{1}{2} \\ &= 10 + 6 + 3 + 0 \\ &= \binom{\lambda'_1}{2} + \binom{\lambda'_2}{2} + \binom{\lambda'_3}{2} + \binom{\lambda'_4}{2}. \end{aligned}$$

### Remarque 1.6

Le diagramme ci-dessous est le diagramme de Ferrers associé au partage 431 de 8


Dans la littérature, on trouve souvent la représentation symétrique de celle-ci, dite "anglo-saxonne"



Dans toute la suite de ce travail, nous utiliserons la première représentation des diagrammes de Ferrers.

On introduit deux ordres sur les partages de  $n$  : l'ordre de la dominance et l'ordre lexicographique.

L'ordre de la dominance, noté  $\succeq$ , est défini comme suit :

**Définition 1.7**

Soient  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$  et  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$  deux partages d'un même entier  $n$ . On dira que  $\lambda$  domine  $\mu$  et on notera  $\lambda \succeq \mu$  si et seulement si on a :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\geq \mu_1, \\ \lambda_1 + \lambda_2 &\geq \mu_1 + \mu_2, \\ &\vdots \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_i &\geq \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_i, \\ &\vdots \end{aligned}$$

pour tout  $i \geq 1$  (les parts des partages  $\lambda$  et  $\mu$  correspondant à un indice strictement supérieur à leur longueur seront supposées nulles, i.e. si  $i > k$  (resp.  $i > m$ ), on convient que  $\lambda_i = 0$  (resp.  $\mu_i = 0$ )).

On obtient ainsi l'ordre de la dominance qui n'est pas un ordre total ; par exemple, les partages  $(3, 3)$  et  $(4, 1, 1)$  de 6 ne sont pas comparables puisque  $3 \leq 4$  mais  $3 + 3 > 4 + 1$ .

Une extension linéaire de cet ordre est l'ordre lexicographique, noté  $<$ , qui est, comme son nom l'indique, l'ordre du dictionnaire ; il est défini comme suit :

**Définition 1.8**

Soient  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$  et  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$  deux partages d'un même entier  $n$ . Alors  $\lambda < \mu$  si, pour un certain indice  $i$ ,

$$\lambda_j = \mu_j \text{ si } j < i \text{ et } \lambda_i < \mu_i.$$

Il s'agit cette fois d'un ordre total. De plus, on vérifie que

$$\lambda \supseteq \mu \text{ implique } \lambda > \mu.$$

Notons  $p(n)$  le nombre de partages de l'entier  $n$ . La proposition suivante donne alors une expression de la série génératrice de la suite  $(p(n))_{n \geq 0}$ .

**Proposition 1.9**

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p(n) t^n = \prod_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1-t^n}.$$

**Preuve**

Toute partition  $\lambda$  de  $n$  peut s'écrire de manière unique sous la forme multiplicative  $\lambda = 1^{d_1} 2^{d_2} \dots n^{d_n}$  avec  $d_k \geq 0$  pour tout  $k \geq 1$  ( $d_k$  désigne simplement la multiplicité de la part  $k$  dans  $\lambda$ ) et  $d_1 + 2d_2 + \dots + nd_n = n$ . On en déduit donc que

$$\begin{aligned} \prod_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1-t^n} &= \left( \frac{1}{1-t} \right) \cdot \left( \frac{1}{1-t^2} \right) \cdot \dots \\ \prod_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1-t^n} &= \left( \sum_{d_1 \geq 0} t^{d_1} \right) \cdot \left( \sum_{d_2 \geq 0} t^{2d_2} \right) \cdot \dots \\ &= \sum_{d_1, d_2, \dots \geq 0} t^{d_1 + 2d_2 + \dots} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{\substack{d_1, d_2, \dots \geq 0, \\ d_1 + 2d_2 + \dots = n}} 1 \right) t^n, \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} p(n) t^n, \end{aligned}$$

ce qui est bien le résultat qu'il fallait établir.

On peut aussi s'intéresser au dénombrement de partages soumis à certaines contraintes. Donnons nous d'abord une partie  $I$  de  $\mathbb{N}$  et considérons  $p(n, I)$  le nombre de partages de  $n$  dont les parts appartiennent à  $I$ . La proposition qui suit donne alors la valeur de la série génératrice de cette suite d'entiers.

**Proposition 1.10**

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p(n, I) t^n = \prod_{i \in I} \frac{1}{1 - t^i}.$$

**Preuve**

Utilisons à nouveau le mode de représentation d'un partage introduit dans la preuve de la proposition 1.9. Un partage de  $n$  dont les parts appartiennent toutes à  $I$  s'écrit donc de façon unique sous la forme  $(i^{k_i})_{i \in I}$  avec  $\sum_{i \in I} k_i i = n$  et  $k_i \geq 0$  pour tout  $i \in I$ . On en déduit donc que

$$\begin{aligned} \prod_{i \in I} \frac{1}{1 - t^i} &= \sum_{k_i \geq 0, i \in I} t^{\sum_{i \in I} k_i i} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{\substack{k_i \geq 0, i \in I, \\ \sum_{i \in I} k_i i = n}} 1 \right) t^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} p(n, I) t^n, \end{aligned}$$

ce qui était bien l'identité à prouver.

Notons maintenant  $p(n, k)$  le nombre de partages de  $n$  à au plus  $k$  parts. La proposition suivante donne alors la valeur de la série génératrice de la suite  $(p(n, k))_{n \geq 0}$ .

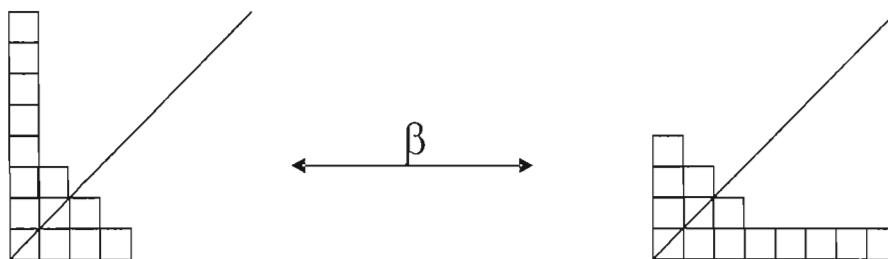
**Proposition 1.11**

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p(n, k) t^n = \frac{1}{(1 - t)(1 - t^2) \dots (1 - t^k)}.$$

**Preuve**

Soit  $\beta$  la symétrie par rapport à la première bissectrice (voir la figure 1.1 ci-dessous). Il est facile de voir que  $\beta$  transforme un diagramme de Ferrers à au plus  $k$  parts en un diagramme de Ferrers dont toutes les parts sont inférieures ou égales à  $k$ .





**Figure 1.1** Transformation d'un diagramme de Ferrers par la symétrie par rapport à la première bissectrice.

Comme  $\beta$  est une bijection, alors il y a autant de partages dont toutes les parts sont inférieures ou égales à  $k$  que de partages à au plus  $k$  parts. On a donc

$$p(n, k) = p(n, [k]), \text{ pour tout } n \geq 0,$$

où  $[k] = \{1, 2, \dots, k\}$ . La proposition 1.10 nous permet donc d'écrire

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} p(n, k) t^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} p(n, [k]) t^n \\ &= \prod_{i=1}^k \frac{1}{1-t^i} \\ &= \frac{1}{(1-t) \cdot (1-t^2) \cdot \dots \cdot (1-t^k)}, \end{aligned}$$

ce qui est le résultat que nous voulions obtenir.

## 1.2 Tableaux de Young

Les tableaux de Young jouent un rôle important dans divers domaines scientifiques, notamment en combinatoire. On les retrouve dans des sujets aussi divers que la théorie des représentations du groupe symétrique et dans l'étude du parallélisme en théorie informatique. Ils furent introduits par A. Young en 1900 pour permettre le calcul de certains idempotents de l'algèbre du groupe symétrique  $S_n$  ainsi que le calcul des matrices de représentations irréductibles de ce groupe.

### Définition 1.12

Pour un diagramme  $\lambda$ , un tableau  $t$  de forme  $\lambda$ , avec valeurs dans  $\{1, 2, \dots, k\}$ , est une fonction

$$t : \lambda \longrightarrow \{1, 2, \dots, k\}.$$

On représente souvent un tel tableau en remplissant chaque case  $c$  de  $\lambda$  avec la valeur  $t(c)$ . Le tableau  $t$  est dit injectif si la fonction sous-jacente est injective. Par exemple, on a le tableau non injectif :

1			
3	4		
6	6	3	12
2	3	2	7

### Définition 1.13

Soit  $\lambda \vdash n$ . Un tableau de Young de forme  $\lambda$  est une fonction injective  $t : \lambda \longrightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ .

Autrement dit, on obtient le tableau  $t$  en remplissant les cases de  $\lambda$  avec les nombres de 1 à  $n$  bijectivement. On dit aussi que  $t$  est un  $\lambda$ -tableau. Clairement, il y a  $n!$   $\lambda$ -tableaux pour  $\lambda \vdash n$ .

### Exemple 1.14

Les tableaux

3		3		2		2		1		1	
1	2	2	1	1	3	3	1	2	3	3	2

sont tous les tableaux de Young de forme 21, i.e. tous les (21)-tableaux.

Notons par  $t_{ij}$  l'entrée du tableau  $t$  dans la case  $(i-1, j-1)$ . Ainsi, le premier tableau dans l'exemple ci-dessus a les entrées  $t_{11} = 1$ ,  $t_{12} = 2$  et  $t_{21} = 3$ .

On dit que le tableau  $t$  est *semi-standard* si les valeurs sont faiblement croissantes sur chaque ligne en allant de la gauche vers la droite, et strictement croissantes sur les colonnes en allant du bas vers le haut, i.e.  $t$  est semi-standard si

$$t(i, j) \leq t(i+1, j) \text{ et } t(i, j) < t(i, j+1).$$

Ainsi, on a par exemple le tableau semi-standard :

10			
9	11		
3	4	4	7
2	2	3	5

**Définition 1.15**

Un tableau  $t$  de forme  $\lambda \vdash n$ , est dit un *tableau standard* s'il est *semi-standard* et *injectif*.

Il y a donc forcément croissance stricte dans les lignes. Autrement dit,

$$t(i, j) < t(i + 1, j) \text{ et } t(i, j) < t(i, j + 1).$$

Par exemple, le tableau

11			
4	8		
2	5	7	9

est un tableau standard à 7 éléments, de forme 421.

**Définition 1.16**

Un tableau  $t$  de forme  $\lambda \vdash n$ , est dit un *tableau de Young standard* s'il est *standard* à valeurs dans  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

Ainsi, on peut dire qu'un tableau de Young standard à  $n$  cellules est un diagramme de Ferrers, associé à un certain partage de l'entier  $n$ , étiqueté par les entiers de  $\{1, 2, \dots, n\}$  de telle sorte que les entrées soient strictement croissantes de gauche à droite et de bas en haut. Le tableau suivant est un tableau de Young standard de forme 531

6				
2	5	9		
1	3	4	7	8

**Exemple 1.17**

Les tableaux

1	2	3	4
---	---	---	---

4		
1	2	3

3		
1	2	4

2		
1	3	4

4		
3		
1	2	

4		
2		
1	3	

3		
2		
1	4	

4		
3		
2		
1		

3	4
1	2

2	4
1	3

sont tous les tableaux de Young standards sur  $n = 4$ .

Les tableaux

3		
2	5	
1	4	

4		
2	5	
1	3	

5		
2	4	
1	3	

5		
3	4	
1	2	

4		
3	5	
1	2	

sont tous les tableaux de Young standards de forme 221.

Nous désignons par  $\mathcal{D}_n$  l'ensemble des tableaux de Young standards à  $n$  éléments et par  $\mathcal{D}_n^0$  l'ensemble des tableaux standards à  $k$  éléments avec  $k \leq n$  et à valeurs dans  $A$  où  $A \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ , i.e. les entrées d'un tableau  $t \in \mathcal{D}_n^0$  sont des nombres  $\leq n$ .

### Exemple 1.18

Les tableaux

9			
4	7		
1	2		

9			
5	7		
1	3	4	

2	4	6	8
---	---	---	---

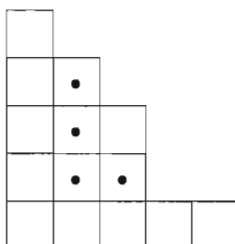
8	9		
5	6	7	
1	2	3	4

sont des éléments de  $\mathcal{D}_9^0$ .

## 1.3 Formule des équerres

Soit  $\lambda$  un partage d'un entier  $n$ . Chaque case  $c$  de  $\lambda$  est le coin d'une équerre qui consiste en l'ensemble des cases de  $\lambda$  qui se trouvent soit au dessus de  $c$  et dans la même colonne, ou bien à

droite de  $c$  et dans la même ligne (ces deux types de case peuvent éventuellement ne pas exister).  
 Nous donnons ci-dessous un exemple d'équerre pour le partage 53321.



La longueur d'une équerre est le nombre de cases qui la composent (l'équerre précédente et ainsi de longueur 4).

Maintenant, nous pouvons donner le résultat principal suivant :

### **Théorème 1.19**

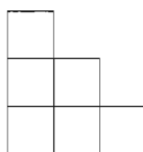
Soit  $f_\lambda$  le nombre de tableaux de Young standards de forme  $\lambda$ . Alors  $f_\lambda$  est donné par la formule suivante, dite des équerres,

$$f_\lambda = \frac{n!}{\prod_{c \in \lambda} h_c},$$

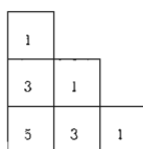
où, pour  $c$  une case de  $\lambda$ ,  $h_c$  est la longueur d'équerre de la case  $c$ , à savoir

$$h_c = (\lambda_i - i) + (\lambda'_j - j) + 1 \text{ si } c = (i - 1, j - 1).$$

Donc le nombre  $f_\lambda$  est égal à  $n!$  divisé par le produit des longueurs de toutes les équerres que l'on peut construire dans  $\lambda$ . Ainsi pour le partage



on a les valeurs d'équerres



et il y a donc  $16 = \frac{5!}{5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}$  tableaux standards de forme 321 qui sont

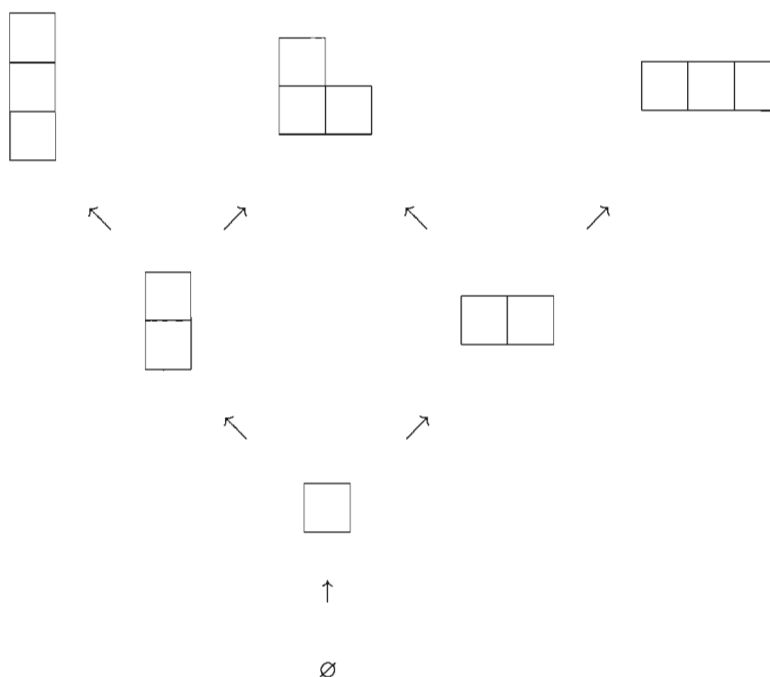
<table><tr><td>3</td><td></td><td></td></tr><tr><td>2</td><td>5</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td>4</td><td>6</td></tr></table>	3			2	5		1	4	6	<table><tr><td>3</td><td></td><td></td></tr><tr><td>2</td><td>6</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td>4</td><td>5</td></tr></table>	3			2	6		1	4	5	<table><tr><td>4</td><td></td><td></td></tr><tr><td>2</td><td>6</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>5</td></tr></table>	4			2	6		1	3	5	<table><tr><td>4</td><td></td><td></td></tr><tr><td>2</td><td>5</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>6</td></tr></table>	4			2	5		1	3	6
3																																							
2	5																																						
1	4	6																																					
3																																							
2	6																																						
1	4	5																																					
4																																							
2	6																																						
1	3	5																																					
4																																							
2	5																																						
1	3	6																																					
<table><tr><td>4</td><td></td><td></td></tr><tr><td>3</td><td>5</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>6</td></tr></table>	4			3	5		1	2	6	<table><tr><td>4</td><td></td><td></td></tr><tr><td>3</td><td>6</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>5</td></tr></table>	4			3	6		1	2	5	<table><tr><td>5</td><td></td><td></td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>6</td></tr></table>	5			2	4		1	3	6	<table><tr><td>5</td><td></td><td></td></tr><tr><td>2</td><td>6</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>4</td></tr></table>	5			2	6		1	3	4
4																																							
3	5																																						
1	2	6																																					
4																																							
3	6																																						
1	2	5																																					
5																																							
2	4																																						
1	3	6																																					
5																																							
2	6																																						
1	3	4																																					
<table><tr><td>5</td><td></td><td></td></tr><tr><td>3</td><td>4</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>6</td></tr></table>	5			3	4		1	2	6	<table><tr><td>5</td><td></td><td></td></tr><tr><td>3</td><td>6</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>4</td></tr></table>	5			3	6		1	2	4	<table><tr><td>5</td><td></td><td></td></tr><tr><td>4</td><td>6</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr></table>	5			4	6		1	2	3	<table><tr><td>6</td><td></td><td></td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>5</td></tr></table>	6			2	4		1	3	5
5																																							
3	4																																						
1	2	6																																					
5																																							
3	6																																						
1	2	4																																					
5																																							
4	6																																						
1	2	3																																					
6																																							
2	4																																						
1	3	5																																					
<table><tr><td>6</td><td></td><td></td></tr><tr><td>2</td><td>5</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>4</td></tr></table>	6			2	5		1	3	4	<table><tr><td>6</td><td></td><td></td></tr><tr><td>3</td><td>4</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>5</td></tr></table>	6			3	4		1	2	5	<table><tr><td>6</td><td></td><td></td></tr><tr><td>3</td><td>5</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>4</td></tr></table>	6			3	5		1	2	4	<table><tr><td>6</td><td></td><td></td></tr><tr><td>4</td><td>5</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr></table>	6			4	5		1	2	3
6																																							
2	5																																						
1	3	4																																					
6																																							
3	4																																						
1	2	5																																					
6																																							
3	5																																						
1	2	4																																					
6																																							
4	5																																						
1	2	3																																					

La formule des équerres, (Frame, Robinson et Trall, 54), a été démontrée de diverses façons. Il existe une preuve algébrique utilisant les déterminants de Vandermonde (James et Kerber, 81). On trouve également quelques démonstrations combinatoires : celle de Remmel (Remmel, 82), celle de Zeilberger (Zeilberger, 84), utilisant la notion de tableau pointeur ou bien celle de Igor pak (Pak, 01), pour ne citer que celles-là. Il y a une preuve probabiliste, utilisant un algorithme générant aléatoirement et uniformément un tableau ayant une forme donnée. Cette démonstration est due à Greene, Nijenhuis et Wilf (Greene, Nijenhuis et Wilf, 79).

#### Remarque 1.20 : Ordres sur les partages

Il existe un ordre qui compare les partages sur des entiers distincts. Du point de vue des diagrammes, c'est simplement l'inclusion. Comme l'intersection et l'union de partages est un partage, l'ensemble des partages ordonné par inclusion forme donc un treillis. On l'appelle le treillis de Young. Ci-dessous, on trouve une petite partie.

Un tableau standard de forme  $\lambda$  correspond à une chaîne maximale du partage vide au partage  $\lambda$  dans le treillis de Young représenté par la figure ci-dessous, en considérant que la case étiquetée  $i$  apparaît à la  $i^{\text{ème}}$  étape.

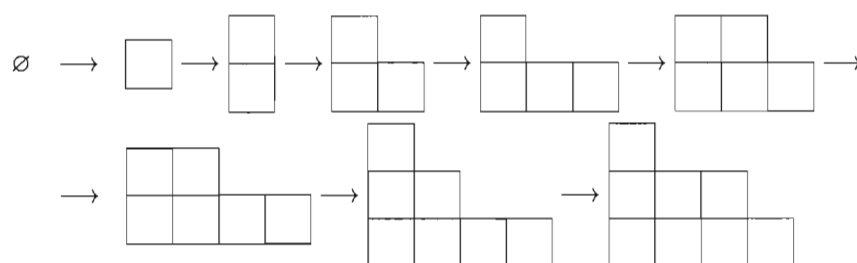


### Exemple 1.21

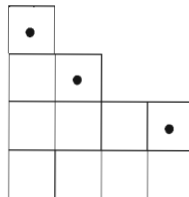
Le tableau standard

7			
2	5	8	
1	3	4	6

correspond (bijectivement) à la chaîne maximale



Si  $\lambda$  couvre  $\mu$  dans ce treillis, on écrit  $\mu \rightarrow \lambda$ . Autrement dit,  $\mu$  s'obtient de  $\lambda$  en enlevant un coin à  $\lambda$ . Rappelons que pour un partage  $\lambda$  de  $n$ , la case  $c = (\lambda_i - 1, i - 1)$  est appelée *un coin* de  $\lambda$  si  $\lambda_i > \lambda_{i+1}$ . Ainsi, les coins du partage  $\mu = 4421$  sont les cases contenant un cercle dans la figure suivante :



## 1.4 Permutations et inversions

Le groupe symétrique  $\mathcal{S}_n$  est constitué de toutes les bijections de l'ensemble  $\{1, 2, \dots, n\}$  vers lui-même en utilisant la composition usuelle comme une loi de composition interne. Les éléments  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  sont appelés *permutations*.

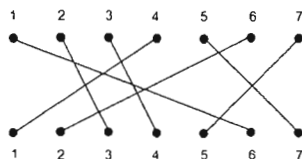
La façon classique de représenter une permutation est la suivante :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix},$$

ce qui correspond au mot

$$\sigma = \sigma(1) \sigma(2) \sigma(3) \cdots \sigma(n).$$

Une autre façon de voir une permutation est de la représenter comme un graphe biparti, dont les sommets sont constitués de deux rangs superposés de  $n$  sommets étiquetés par les entiers de 1 à  $n$ . La permutation  $\sigma = 6341725$  correspond ainsi au graphe biparti de la figure 1.2 ci-dessous.



**Figure 1.2** La permutation  $\sigma = 6341725$  représentée par un graphe biparti.

Soit  $x_1 x_2 \dots x_n$  une permutation de l'ensemble  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Si  $i < j$  et  $x_i > x_j$ , la paire  $(x_i, x_j)$  est appelée *une inversion* de cette permutation. Par exemple, la permutation 3142 a trois inversions :



(3, 1), (3, 2) et (4, 2). Le concept d'inversions a été introduit par G. Cramer en 1750 dans sa fameuse règle pour résoudre un système d'équations linéaires. En effet, il a défini le déterminant d'une matrice  $n \times n$  de la manière suivante :

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \sum (-1)^{\text{inv}(x_1 x_2 \dots x_n)} a_{1x_1} a_{2x_2} \dots a_{nx_n},$$

où la somme du second membre est étendue à toutes les permutations  $x_1 x_2 \dots x_n$  de l'ensemble  $[n]$  avec  $\text{inv}(x_1 x_2 \dots x_n)$  le nombre d'inversions de la permutation  $x_1 x_2 \dots x_n$ .

La table d'inversions  $y_1 y_2 \dots y_n$  de la permutation  $x_1 x_2 \dots x_n$  est obtenue en posant :  $y_j =$  le nombre d'éléments qui sont à gauche de  $j$  et plus grand que  $j$ . En d'autres mots,  $y_j$  est le nombre d'inversions qui ont  $j$  comme deuxième composante. Par exemple, la permutation 591826473 a la table d'inversions 236402210. Puisque 5 et 9 sont à gauche de 1 ; 5, 9 et 8 sont à gauche de 2 ; etc. Ainsi cette permutation a  $20 = 2 + 3 + 6 + 4 + 0 + 2 + 2 + 1 + 0$  inversions.

Notons  $I_{n,k}$  le nombre de permutations de  $S_n$  à  $k$  inversions. On désignera alors par  $I_n(q)$  le polynôme générateur de cette suite, qui est donc défini par

$$I_n(q) = \sum_{k \geq 0} I_{n,k} q^k.$$

La proposition suivante donne une expression explicite du polynôme  $I_n(q)$  (Krob, 1995, p.19).

**Proposition 1.22**

Pour tout  $n \geq 1$ , on a :

$$I_n(q) = (1+q) \cdot (1+q+q^2) \cdot \dots \cdot (1+q+\dots+q^{n-1}) = [n!]_q.$$

On appelle  $[n!]_q$  le  $q$ -analogue classique de  $n!$  ; il est appelé la  $q$ -factorielle.

Le nombre d'inversions d'une permutation caractérise entièrement sa longueur. C'est ce que nous allons montrer ci-dessous.

**Définition 1.23**

On appelle transposition élémentaire toute transposition de  $S_n$  qui échange deux entiers consécutifs, i.e. toute transposition du type  $\sigma_i = (i \ i+1)$  où  $i$  varie dans l'ensemble  $\{1, 2, \dots, n-1\}$ .

Toute transposition  $(i\ j)$  (avec  $i < j$ ) peut s'écrire de manière évidente comme produit de transpositions élémentaires. On a en effet

$$(i\ j) = \sigma_i \sigma_{i+1} \dots \sigma_{j-1} \sigma_{j-2} \dots \sigma_i.$$

Par exemple, dans  $S_7$ ,

$$\begin{aligned} (2\ 5) &= \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_3 \sigma_2 \\ &= (2\ 3)(3\ 4)(4\ 5)(3\ 4)(2\ 3). \end{aligned}$$

Comme les transpositions engendrent le groupe symétrique, on en déduit donc que toute permutation peut aussi s'écrire sous la forme d'un produit de transpositions élémentaires. Cela justifie donc la définition suivante :

**Définition 1.24**

*On appelle longueur d'une permutation  $\sigma$  de  $S_n$  le nombre minimal, noté  $l(\sigma)$ , de transpositions élémentaires nécessaires pour décomposer  $\sigma$  sous la forme d'un produit de telles transpositions. On appelle alors décomposition réduite d'une permutation  $\sigma$  de  $S_n$  toute décomposition de  $\sigma$  en un produit de  $l(\sigma)$  transpositions élémentaires.*

Les décompositions réduites d'une permutation sont donc ses décompositions de longueur minimale en produit de transpositions élémentaires. En général, une permutation possède plusieurs décompositions réduites et il y a donc également plusieurs méthodes pour calculer une décomposition réduite.

La longueur d'une permutation  $\sigma \in S_n$  vérifie les relations fondamentales suivantes :

$$l(\sigma\sigma_i) = \begin{cases} l(\sigma) + 1 & \text{si } \sigma(i) < \sigma(i+1), \\ l(\sigma) - 1 & \text{si } \sigma(i) > \sigma(i+1), \end{cases}$$

pour tout  $i \in [n-1]$ . Une propriété très importante de la longueur d'une permutation est le résultat suivant :

**Proposition 1.25**

*La longueur d'une permutation  $\sigma$  de  $S_n$  est exactement égale à son nombre d'inversions.*

**Remarque 1.26 : Les relations de Moore-Coxeter**

On peut vérifier facilement que les transpositions élémentaires vérifient les relations suivantes,

dites relations de Moore-Coxeter :

$$\begin{cases} \sigma_i^2 = 1 & \text{pour } i \in \{1, 2, \dots, n-1\}, \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & \text{pour } |i-j| > 1, \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} & \text{pour } i \in \{1, 2, \dots, n-2\}. \end{cases}$$

La troisième relation donnée ci-dessus, i.e.

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$$

est également appelée *relation de tresse* ou de Yang-Baxter.

Les relations de Moore-Coxeter sont en fait les relations minimales vérifiées par les transpositions élémentaires. On peut expliciter cette propriété sous la forme donnée par le théorème suivant :

### **Théorème 1.27**

*Le groupe symétrique  $S_n$  est isomorphe au monoïde donné par la présentation suivante :*

- *générateurs : les  $n-1$  lettres  $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$  ;*
- *relateurs : les relations de Moore-Coxeter.*

*Autrement dit,  $S_n$  est isomorphe au monoïde obtenu comme le quotient du monoïde libre  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}\}^*$  par les relations de Moore-Coxeter.*

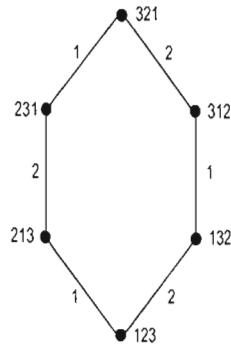
### **Remarque 1.28 : Ordre d'Ehresmann-Bruhat faible**

Le graphe de Cayley associé à la présentation du groupe symétrique  $S_n$  donnée par les relations de Moore-Coxeter est appelé le permutoèdre d'ordre  $n$ . Rappelons qu'il s'agit du graphe valué défini de la manière suivante :

- ses sommets sont exactement les  $n!$  permutations de  $S_n$ .
- deux permutations  $\sigma$  et  $\tau$  sont reliées par une arête (indexée par  $i$ ) si et seulement si la transposition élémentaire  $\sigma_i$  est telle que  $\sigma = \tau \sigma_i$ .

Nous donnons ci-dessous le permutoèdre d'ordre 3.

On remarque que la longueur  $l(\sigma)$  d'une permutation  $\sigma$  de  $S_n$  n'est autre que la distance minimale de l'identité à  $\sigma$  dans le permutoèdre (en comptant une distance 1 entre deux permutations reliées par une arête dans le permutoèdre).



**Figure 1.3** Permutoèdre d'ordre 3.

On notera également que le permutoèdre peut être interprété comme le diagramme de Hasse d'une structure naturelle d'ordre partiel sur les permutations (si  $(P, <)$  est un ensemble partiellement ordonné, on lui associe son diagramme de Hasse. Il s'agit du graphe dont les sommets sont les éléments de  $P$  et où deux éléments  $p, q$  de  $P$  sont reliés par une arête si et seulement si  $p < q$  et s'il n'existe pas d'élément  $r$  dans  $P$  tel que  $p < r < q$ ). On appelle en effet ordre d'Ehresmann-Bruhat faible l'ordre, noté  $\prec$ , sur le groupe symétrique qui est défini de la manière suivante : si  $\sigma$  et  $\tau$  sont deux permutations de  $S_n$ , on aura  $\sigma \prec \tau$  si et seulement s'il existe une transposition élémentaire  $\sigma_i$  telle que

$$\tau = \sigma \sigma_i \text{ et } l(\tau) = l(\sigma) + 1.$$

La longueur d'une permutation apparaît alors comme la hauteur d'une permutation dans cet ordre. On visualise cette propriété lorsque l'on dessine le permutoèdre en plaçant toutes les permutations de même longueur au même niveau vertical.

## 1.5 Diagramme de Rothe d'une permutation et le nombre d'inversions

Le diagramme de Rothe d'une permutation  $x_1 x_2 \dots x_n$  de l'ensemble  $[n]$  est un échiquier  $n \times n$  possédant un point dans la colonne  $i$  et la ligne  $j$  une fois que  $x_i = j$ . Alors en posant une croix  $\times$  dans tous les carrés qui ont à la fois un point au dessous (dans la même colonne) et un point à leurs gauche (dans la même ligne), on obtient le nombre d'inversions de cette permutation qui est le nombre de croix dans ce diagramme. Par exemple, pour la permutation 3641725, le diagramme de Rothe est le suivant :

				•	×	×
	•	×	×		×	×
						•
		•	×		×	
•			×		×	
					•	
			•			

Le nombre de croix qui est 10 est le nombre d'inversions de cette permutation.

Notons aussi que H. A. Rothe, le premier qui a défini l'inverse d'une permutation en 1800, a montré un résultat important donnant le lien entre l'inverse et les inversions :

**Proposition 1.29**

*L'inverse d'une permutation a exactement le même nombre d'inversions que la permutation elle-même.*

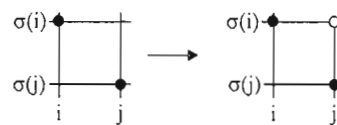
En effet, Rothe a donné une preuve instructive en utilisant le diagramme ci-dessus. Plus précisément, il a montré que le diagramme qui correspond à la permutation inverse est le transposé du diagramme (interchanger les lignes et les colonnes) qui correspond à la permutation. Pour notre exemple, le diagramme de Rothe de la permutation inverse 4613725 est le diagramme donné ci-dessous.

				•	×	×
	•	×	×		×	×
						•
•		×	×		×	
			•		×	
					•	
		•				

Ainsi, le nombre d'inversions est le même dans les deux cas. Rothe a utilisé ce fait pour montrer que le déterminant d'une matrice ne change pas si on considère la matrice transposée.

**Remarque 1.30**

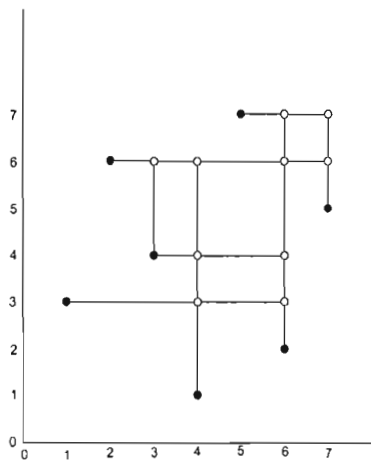
En associant à toute permutation  $\sigma$  de  $S_n$  son graphe ou sa représentation plane  $\hat{\sigma}$ , i.e. l'ensemble des points  $(i, \sigma(i))$  du plan entier  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , le diagramme de Rothe de  $\sigma$  s'obtient alors en associant à chaque inversion de  $\sigma$ , i.e. à tout point  $(i, j)$  de  $[n] \times [n]$  tel que  $i < j$  et  $\sigma(i) > \sigma(j)$ , le point de coordonnées  $(j, \sigma(i))$ . Cette définition peut se visualiser sous la forme de l'opération suivante qu'il convient d'effectuer pour chaque inversion de  $\sigma$  pour obtenir son diagramme de Rothe (voir la figure 1.4 ci-dessous). Les points du graphe de  $\sigma$  sont représentés par des cercles pleins alors que ceux de diagramme de Rothe correspondent à des cercles vides.



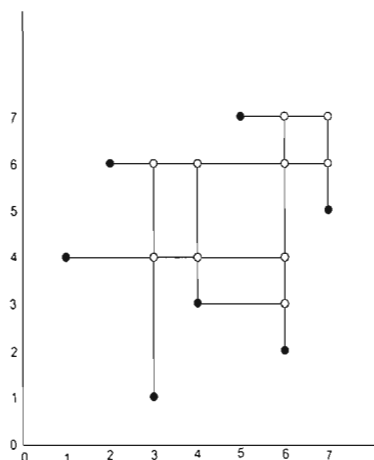
**Figure 1.4** L'opération qu'il convient d'effectuer pour chaque inversion de  $\sigma$  pour obtenir son diagramme de Rothe.

Pour se fixer les idées, nous donnons ci-dessous (voir la figure 1.5 ci-dessous) l'exemple du graphe et du diagramme de Rothe de la permutation 3641725 de  $S_7$ .

Nous donnons aussi ci-dessous (voir la figure 1.6 ci-dessous) le graphe et le diagramme de Rothe de la permutation inverse 4613725 qu'on peut obtenir de ceux de la permutation 3641725 par symétrie par rapport à la première bissectrice.



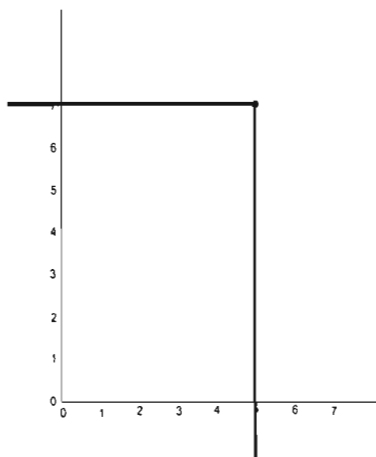
**Figure 1.5** Le graphe et le diagramme de Rothe de la permutation  $\sigma = 3641725$  de  $S_7$ .



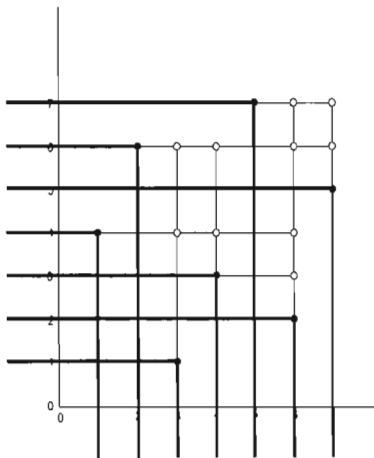
**Figure 1.6** Le graphe et le diagramme de Rothe de la permutation inverse  $\sigma^{-1} = 4613725$  de  $\mathcal{S}_7$ .

Pour chaque point  $P_i = (i, \sigma(i))$  du graphe de  $\sigma$ , on trace l'équerre dont  $P_i$  est le coin ; il s'agit de la réunion des deux demi droites  $x = i, y \leq \sigma(i)$  et  $y = \sigma(i), x \leq i$ . Dans l'exemple suivant (voir la figure 1.7 ci-dessous), l'équerre dont  $P_5 = (5, 7)$  est le coin.

Le diagramme de Rothe de  $\sigma$  est alors exactement l'ensemble des points de  $[n] \times [n]$  qui ne se trouvent sur aucune des équerres précédentes (voir la fiure 1.8 ci-dessous).



**Figure 1.7** L'équerre dont le point  $P_5 = (5, 7)$  est le coin.



**Figure 1.8** Toutes les équerres dont les points du graphe de la permutation  $\sigma = 3641725$  de  $\mathcal{S}_7$  sont les coins.

## 1.6 Représentations du groupe symétrique

Nous allons présenter dans cette section des constructions explicites de représentations du groupe symétrique  $\mathcal{S}_n$ , en particulier celles utilisant la combinatoire des tableaux de Young. Nous rappelons les notions de base de la théorie des représentation des groupes et nous montrons comment construire les représentations irréductibles du groupe symétrique à l'aide de tableaux de Young.

Dans cette section, nous ne ferons aucune démonstration car notre but n'est pas de faire un cours sur la théorie abstraite des représentations d'un groupe fini, mais de voir comment certains résultats généraux s'interprètent et se précisent dans le cas du groupe symétrique. Nous renvoyons donc le lecteur désireux d'en savoir plus sur la théorie des représentations aux excellents ouvrages (Curtis et Reiner, 66 ; Harris et Fulton, 85 ; Serre, 78).

Une représentation peut être définie tant en termes de matrice (représentation matricielle), d'application linéaire (représentation linéaire) que d'action linéaire. Dans certains cas, une approche paraît plus appropriée que les autres et souvent on passe de l'une à l'autre sans insister sur ce passage.



**Définition 1.31**

Une représentation matricielle de degré  $k$  d'un groupe (fini)  $G$  est un homomorphisme de groupes

$$X : G \longrightarrow GL(k, \mathbb{C})$$

où  $GL(k, \mathbb{C})$  est le groupe linéaire général complexe de degré  $k$ , i.e.  $GL(k, \mathbb{C})$  est le groupe de toutes les matrices  $X = (x_{ij})_{k \times k}$  inversibles (sur le corps des complexes) avec la multiplication usuelle et  $I_k$  (la matrice identité  $k \times k$ ) son neutre.

**Exemple 1.32**

Soit  $G$  un groupe fini. La représentation matricielle triviale (de degré  $k$ ) de  $G$  est celle qui envoie chaque  $g \in G$  vers la matrice identité  $I_k$ .

**Exemple 1.33**

Considérons le groupe symétrique  $S_n$  sur  $n$  éléments. Un exemple de représentation matricielle de degré  $n$  de  $S_n$  associe à chaque  $\sigma \in S_n$ , la matrice

$$X(\sigma) = (x_{ij})_{n \times n},$$

où

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } \sigma(j) = i, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette matrice est appelée la matrice de permutation car elle contient seulement des 0 et des 1 avec un unique 1 dans chaque ligne et chaque colonne.

Cette représentation est dite *naturelle* ou permutationnelle. Par exemple, considérons

$$S_3 = \{\varepsilon, (12), (13), (23), (123), (132)\},$$

où  $\varepsilon$  désigne l'application identité de l'ensemble  $[3]$ . Alors les matrices de cette représentation naturelle sont

$$X(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad X((12)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
X((13)) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & X((23)) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\
X((123)) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, & X((132)) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

**Exemple 1.34**

Une autre représentation matricielle non triviale de degré 1 de  $S_n$  est définie par

$$X(\sigma) = [\text{sgn}(\sigma)],$$

où  $\text{sgn}(\sigma)$  est le signe de la permutation  $\sigma$ . C'est la représentation dite *alternée* ou par le signe. Rappelons que le signe  $\text{sgn}(\sigma)$  d'une permutation  $\sigma$  est  $\text{sgn}(\sigma) := (-1)^{l(\sigma)}$ , où  $l(\sigma)$  est la longueur de la permutation  $\sigma$ , i.e. le nombre d'inversions de la permutation  $\sigma$ .

Comme la notion de matrice est liée à celle d'application linéaire, modulo le choix d'une base, on peut définir la notion de représentation d'un groupe  $G$  comme suit :

**Définition 1.35**

Une représentation linéaire d'un groupe  $G$  est un homomorphisme de groupes

$$\rho : G \longrightarrow GL(V),$$

où  $GL(V)$  est le groupe des transformations linéaires inversibles de  $V$  dans  $V$  et  $V$  est un espace vectoriel de dimension finie sur  $\mathbb{C}$ .

On dit que  $V$  est un  $G$ -module ou que  $G$  agit linéairement sur  $V$  car la représentation  $\rho$  est équivalente à la donnée d'une action linéaire de  $G$  sur  $V$ .

**Exemple 1.36**

Pour  $k \in \mathbb{N}$ , soit  $V$  l'ensemble des polynômes homogènes en les variables  $x_1, x_2$  et  $x_3$  de degré égal à  $k$  à coefficients dans  $\mathbb{Q}$ ; on écrit

$$V = \mathbb{Q}_k[x_1, x_2, x_3]$$

On obtient une représentation linéaire  $\rho : S_3 \longrightarrow GL(V)$  du groupe symétrique  $S_3$  en posant pour  $\sigma \in S_3$  et  $P \in V$  :

$$(\rho(\sigma))(P)(x_1, x_2, x_3) = P(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}).$$

Par exemple, si  $k = 2$ , on a la base (ordonnée)  $\mathfrak{B} = \{x_1^2, x_1x_2, x_2^2, x_2x_3, x_3^2, x_1x_3\}$  et pour chaque permutation  $\sigma$  on peut calculer la matrice  $[\rho(\sigma)]_{\mathfrak{B}}$ . Ainsi si  $\sigma = 312$  on obtient

$$[\rho(\sigma)]_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Une troisième approche de la notion de représentation d'un groupe consiste à faire appel à la notion d'action.

**Définition 1.37**

Soient  $G$  un groupe et  $V$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$ . Une action linéaire du groupe  $G$  sur l'espace  $V$  est une application

$$\rho : G \times V \longrightarrow V,$$

telle que l'on ait pour tous  $g, h \in G$ ,  $v, w \in V$  et  $a, b \in \mathbb{C}$  (écrivant  $g \cdot v = \rho(g, v)$  pour simplifier la notation)

$$(1) \quad g \cdot v \in V,$$

$$(2) \quad g \cdot (av + bw) = a(g \cdot v) + b(g \cdot w),$$

$$(3) \quad (gh) \cdot v = g \cdot (h \cdot v),$$

$$(4) \quad 1 \cdot v = v,$$

pour tous  $g, h \in G$ ,  $v, w \in V$  et  $a, b \in \mathbb{C}$ .

On dit aussi que  $V$  est un  $G$ -module. On associe naturellement une représentation linéaire à une action linéaire en posant

$$\rho(g, v) = (\rho(g))(v).$$

En général, une représentation porte le nom de l'espace  $V$ .

Comme, pour  $\mathfrak{B}$  une base ordonnée de l'espace vectoriel  $V$ , la donnée d'une transformation linéaire  $\rho(g) : V \longrightarrow V$  correspond à la donnée de  $[\rho(g)]_{\mathfrak{B}}$ , la matrice de la transformation  $\rho(g)$  dans la base  $\mathfrak{B}$ . Alors la donnée de  $\rho$  est équivalente (modulo le choix d'une base) à la donnée de la représentation matricielle  $g \mapsto [\rho(g)]_{\mathfrak{B}}$ .

### Définition 1.38

Soit  $G$  un groupe, soient  $V$  et  $W$  deux  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels et soient  $\rho, \tau$  deux représentations linéaires de  $G$  respectivement dans  $GL(V)$  et  $GL(W)$ . On dit alors que  $\rho$  et  $\tau$  de  $G$  sont isomorphes si et seulement s'il existe un isomorphisme  $\varphi$  de  $V$  dans  $W$  tel que

$$\varphi(\rho(g)(v)) = \tau(g)(\varphi(v)) \text{ pour tout } g \in G \text{ et tout } v \in V.$$

Autrement dit, si et seulement s'il existe un isomorphisme  $\varphi$  de  $V$  dans  $W$  tel que le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{\rho(g)} & V \\ \varphi \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \varphi \\ W & \xrightarrow{\tau(g)} & W \end{array}$$

soit commutatif.

Des représentations isomorphes ont nécessairement même degré  $n$ . On constate aussi, d'un point de vue matriciel, que des représentations  $\rho$  et  $\tau$  de dimension  $n$  d'un même groupe  $G$  sont isomorphes si et seulement s'il existe une matrice inversible  $T \in GL(n, \mathbb{C})$  telle que l'on ait

$$\rho(g) = T^{-1}\tau(g)T \text{ pour tout } g \in G.$$

### Remarque 1.39 : Représentation permutationnelle

Il est toujours possible de construire un  $G$ -module à partir d'un ensemble  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  sur lequel agit le groupe  $G$ . En effet, dénotons par

$$\mathbb{C}S = \mathbb{C}\{s_1, s_2, \dots, s_n\} = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}s_i,$$

l'espace vectoriel engendré par  $S$  sur  $\mathbb{C}$ , i.e.  $\mathbb{C}S$  est constitué de toutes les combinaisons linéaires formelles

$$c_1 s_1 + c_2 s_2 + \dots + c_n s_n$$

où  $c_i \in \mathbb{C}$  pour tout  $i$ . L'addition de vecteurs et la multiplication d'un vecteur par un scalaire dans  $\mathbb{C}S$  sont définies par

$$(c_1 s_1 + \dots + c_n s_n) + (d_1 s_1 + \dots + d_n s_n) = (c_1 + d_1) s_1 + \dots + (c_n + d_n) s_n$$

et

$$c(c_1 s_1 + \dots + c_n s_n) = (cc_1) s_1 + \dots + (cc_n) s_n,$$

respectivement. Maintenant, on peut étendre l'action de  $G$  sur  $S$  à  $\mathbb{C}S$  par linéarité comme suit :

$$g \cdot (c_1 s_1 + \dots + c_n s_n) = c_1 (g \cdot s_1) + \dots + c_n (g \cdot s_n) \text{ pour tout } g \in G.$$

Ceci donne à  $\mathbb{C}S$  une structure de  $G$ -module de dimension  $|S|$ . Le module  $\mathbb{C}S$  associé à l'action du groupe  $G$  sur l'ensemble  $S$  est appelé la représentation naturelle ou permutationnelle associée avec  $S$ . Les éléments de  $S$  forment une base pour  $\mathbb{C}S$  appelée la base standard.

#### Exemple 1.40

Considérons le groupe symétrique  $S_n$ . Le groupe  $S_n$  agit sur l'ensemble  $[n]$  comme suit :

$$\sigma \cdot x = \sigma(x), \forall \sigma \in S_n, \forall x \in [n].$$

Maintenant,

$$\mathbb{C}S = \{c_1 1 + c_2 2 + \dots + c_n n \mid c_i \in \mathbb{C} \text{ pour tout } i\}$$

avec l'action

$$\sigma \cdot (c_1 1 + c_2 2 + \dots + c_n n) = c_1 \sigma(1) + c_2 \sigma(2) + \dots + c_n \sigma(n), \text{ pour tout } \sigma \in S_n.$$

$\mathbb{C}S$  est un  $S_n$ -module ; pour le voir il suffit de sélectionner une base et de déterminer les matrices  $X(\sigma)$  pour tout  $\sigma \in S_n$ . Par exemple, considérons  $S_3$  et utilisons la base standard  $\{1, 2, 3\}$ . Pour trouver la matrice qui correspond à  $\sigma = (12)$ , on calcule

$$(12) 1 = 2, (12) 2 = 1, (12) 3 = 3$$

et ainsi

$$X((12)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On peut déterminer les autres matrices de la même manière. On peut aussi remarquer qu'elles sont les mêmes matrices que celles de la représentation naturelle ; Exemple 1.33. En général, ceci est vrai pour tout  $n$  et  $\mathbb{C}S$  est l'approche  $S_n$ -module pour la représentation naturelle de  $S_n$ .

**Remarque 1.41 : Représentation régulière**

La représentation régulière (gauche) est l'une des représentations importantes d'un groupe. Soit  $G$  un groupe arbitraire, alors  $G$  agit sur lui-même par multiplication à gauche, i.e.

$$g \cdot h = gh \text{ pour tous } g, h \in G$$

où  $gh$  est le produit usuel des éléments  $g$  et  $h$  dans  $G$ . Si  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ , alors on a le  $G$ -module correspondant qu'on note  $\mathbb{C}[G]$  où

$$\mathbb{C}[G] = \{c_1g_1 + c_2g_2 + \dots + c_ng_n \mid c_i \in \mathbb{C} \text{ pour tout } i\} = \bigoplus_{g \in G} \mathbb{C}g.$$

$\mathbb{C}[G]$  est appelé l'algèbre du groupe  $G$ . Notons que  $\mathbb{C}[G]$  est une algèbre et pas seulement un espace vectoriel. La multiplication est définie comme suit :  $g_i g_j = g_k$  dans  $\mathbb{C}[G]$  si  $g_i g_j = g_k$  dans  $G$ . Ensuite, on prolonge par linéarité, i.e. le produit dans  $\mathbb{C}[G]$  est défini par la relation

$$\left( \sum_{g \in G} a_g g \right) \left( \sum_{g \in G} b_g g \right) = \sum_{g \in G} \left( \sum_{uv=g} a_u b_v \right) g.$$

L'action de  $G$  sur  $\mathbb{C}[G]$  est donnée par

$$g \cdot (c_1g_1 + \dots + c_ng_n) = c_1(gg_1) + \dots + c_n(gg_n) \text{ pour tout } g \in G.$$

Ainsi, la représentation régulière d'un groupe  $G$ , suivant le principe que nous venons de décrire à la remarque 1.39, n'est autre que la représentation permutationnelle associée à l'action régulière gauche de  $G$  sur lui-même.

**Remarque 1.42**

Soit  $G$  un groupe et  $H$  un sous-groupe de  $G$ . Une généralisation de la représentation régulière est la représentation de classes de  $G$  par rapport à  $H$ . Soient  $g_1, g_2, \dots, g_k$  une liste d'éléments de  $G$  telle que  $\mathcal{H} = \{g_1H, g_2H, \dots, g_kH\}$  est une partition de  $G$ , i.e.  $\mathcal{H}$  est l'ensemble des classes latérales (à gauche) de  $H$  dans  $G$ . Alors  $G$  agit sur  $\mathcal{H}$  comme suit :

$$g \cdot (g_iH) = (gg_i)H \text{ pour tout } g \in G \text{ et } i \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

L'action de  $G$  sur  $\mathcal{H}$  peut être prolongée à  $\mathbb{C}\mathcal{H}$ , où

$$\mathbb{C}\mathcal{H} = \{c_1 g_1 H + \dots + c_k g_k H \mid c_i \in \mathbb{C} \text{ pour tout } i\},$$

comme suit :

$$\begin{aligned} g \cdot (c_1 g_1 H + \dots + c_k g_k H) &= c_1 (g \cdot (g_1 H)) + \dots + c_k (g \cdot (g_k H)) \\ &= c_1 ((g g_1) H) + \dots + c_k ((g g_k) H). \end{aligned}$$

Ainsi,  $\mathbb{C}\mathcal{H}$  est un  $G$ -module de dimension  $k$ .

Notons que si  $H = G$ , alors la représentation de classes de  $G$  par rapport à  $H$  est la représentation triviale, alors que si  $H = \{\varepsilon\}$ , ce qui implique  $\mathcal{H} = G$ , on obtient la représentation régulière.

Considérons  $G = S_3$  et  $H = \{\varepsilon, (23)\}$ . On prend  $\mathcal{H} = \{H, (12)H, (13)H\}$ . Remarquons que

$$\begin{aligned} S_3 &= \{\varepsilon, (12), (13), (23), (123), (132)\}, \\ H &= \{\varepsilon, (23)\}, \\ (12)H &= \{(12), (123)\}, \\ (13)H &= \{(13), (132)\}, \\ S_3 &= H \uplus (12)H \uplus (13)H. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathbb{C}\mathcal{H} = \{c_1 H + c_2 (12)H + c_3 (13)H \mid c_i \in \mathbb{C} \text{ pour tout } i\}.$$

Calculons la matrice de  $(12)$  dans la base standard  $\{H, (12)H, (13)H\}$  de  $\mathbb{C}\mathcal{H}$ , on obtient

$$(12)H = (12)H, (12)(12)H = H, (12)(13)H = (132)H = (13)H,$$

ainsi

$$X((12)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

En calculant toutes les autres matrices, on obtient les matrices de la représentation permutationnelle de  $S_3$ . La raison est que les  $S_3$ -modules  $\mathbb{C}\mathcal{H}$  et  $\mathbb{C}\{1, 2, 3\}$  des deux représentations sont isomorphes.

**Définition 1.43**

Soit  $\rho : G \longrightarrow GL(V)$  une représentation linéaire complexe de  $G$  dans  $V$  et soit  $U$  un sous-espace vectoriel de  $V$ . On dit que  $U$  est un sous-espace stable de  $V$  (relativement à  $\rho$ ) si et seulement si

$$\rho(g)(u) \in U, \text{ pour tous } g \in G \text{ et } u \in U.$$

Dans un tel cas,  $\rho(g)$ , qui est un automorphisme de  $V$ , induit un automorphisme bien défini de  $U$ , qu'on dénote par  $\rho_U(g)$ , en considérant la restriction de  $\rho(g)$  à  $U$ , i.e.  $\rho_U(g) = \rho(g)|_U$ . Ainsi, on obtient facilement que  $\rho_U : G \longrightarrow GL(U)$  est une représentation linéaire complexe de  $G$  dans  $U$ . On dit que  $\rho_U$  est une sous-représentation de  $\rho$ .

À partir de représentations données, on peut en construire d'autres, via certaines opérations. Ainsi, la somme directe  $\rho_1 \oplus \rho_2$  de représentations matricielles  $\rho_1$  et  $\rho_2$ , de degrés  $k$  et  $j$  respectivement, est :

$$\rho_1 \oplus \rho_2 : G \longrightarrow GL(k + j, \mathbb{C}),$$

définie, pour  $g \in G$ , par :

$$(\rho_1 \oplus \rho_2)(g) := \begin{bmatrix} \rho_1(g) & 0 \\ 0 & \rho_2(g) \end{bmatrix}.$$

**Remarque 1.44**

La somme directe se reformule pour les notions de représentation linéaire et d'action linéaire de la manière suivante :

- pour des représentations linéaires  $\rho_i : G \longrightarrow GL(V_i)$ ,  $i = 1, 2$  et  $g \in G$ , on pose

$$(\rho_1 \oplus \rho_2)(g)(v_1, v_2) := (\rho_1(g)(v_1), \rho_2(g)(v_2)).$$

Clairement,  $\rho_1 \oplus \rho_2 : G \longrightarrow GL(V_1 \oplus V_2)$  est un homomorphisme de groupes.

- pour des actions linéaires  $G \times V_i \longrightarrow V_i$ ,  $i = 1, 2$ , on a une action

$$G \times (V_1 \oplus V_2) \longrightarrow V_1 \oplus V_2,$$

obtenue en posant :

$$g \cdot (v_1, v_2) := (g \cdot v_1, g \cdot v_2).$$



La notion de somme directe de représentations suggère d'étudier la décomposition de représentation en représentations plus simples ou "irréductibles" au sens suivant.

**Définition 1.45**

*Une représentation d'un groupe  $G$  est dite réductible si elle est isomorphe à une somme directe non triviale de représentations de degrés  $\geq 1$ . Elle est irréductible sinon.*

On peut montrer que l'irréductibilité d'une représentation  $\rho : G \longrightarrow GL(V)$  se caractérise aussi par le fait suivant :

**Définition 1.46**

*On dit que  $\rho : G \longrightarrow GL(V)$  est une représentation irréductible de  $G$  si  $V \neq \{0\}$  et si les seuls sous-espaces stables (relativement à  $\rho$ ) de  $V$  sont  $\{0\}$  et  $V$ .*

Un résultat fondamental de la théorie de représentations des groupes finis est le théorème de Maschke qui montre que toute représentation se décompose en somme directe de représentations irréductibles

**Théorème 1.47 (de Maschke)**

*Toute représentation d'un groupe fini  $G$  se décompose de manière unique, à isomorphisme près, en somme directe de représentations irréductibles.*

Rappelons que deux éléments  $g, h$  d'un groupe  $G$  sont conjugués s'il existe  $u \in G$  tel que  $g = u h u^{-1}$ . Il est facile de voir que la relation de conjugaison ainsi définie est une relation d'équivalence sur  $G$ . Le théorème suivant montre que les classes de conjugaison d'un groupe fini paramètrent en fait ses représentations irréductibles (qui sont donc aussi en nombre fini à isomorphisme près).

**Théorème 1.48**

*Soit  $G$  un groupe fini. Le nombre de représentations irréductibles de  $G$  est exactement égal au nombre de classes de conjugaison de  $G$ .*

Il est enfin aussi intéressant de savoir que l'on retrouve dans la représentation régulière d'un groupe fini toutes ses représentations irréductibles.

**Théorème 1.49**

Soit  $G$  un groupe fini. Considérons alors  $\{V_i\}_{i=1,\dots,N}$  l'ensemble de ses représentations irréductibles (à isomorphisme près) et notons  $d_i$  la dimension de  $V_i$ . La représentation régulière de  $G$  se décompose alors en somme directe de représentations irréductibles de la manière suivante :

$$\mathbb{C}[G] = \bigoplus_{i=1}^N \underbrace{V_i \oplus \dots \oplus V_i}_{d_i \text{ fois}}.$$

Autrement dit chaque représentation irréductible  $V_i$  de  $G$  apparaît avec une multiplicité égale à sa dimension comme facteur direct dans la représentation régulière du groupe  $G$ .

En prenant les dimensions des représentations intervenant dans les deux membres de la décomposition donnée par le théorème précédent, on obtient alors immédiatement le corollaire suivant :

**Corollaire 1.50**

Soit  $G$  un groupe fini et soit  $(V_i)_{i=1,\dots,N}$  l'ensemble de ses représentations irréductibles. Notons  $d_i$  la dimension de la représentation  $V_i$ . On a alors

$$|G| = \sum_{i=1}^N d_i^2.$$

Maintenant, nous allons montrer en particulier comment plusieurs objets combinatoires, comme les tableaux de Young et les tabloïdes, permettent de construire explicitement les représentations irréductibles d'un groupe symétrique donné.

Nous voulons associer à un partage  $\lambda \vdash n$  un sous groupe de  $S_n$ . Rappelons que si  $A$  est un ensemble quelconque, alors  $S_A$  est l'ensemble de toutes les permutations de  $A$ .

**Définition 1.51**

Soit  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \vdash n$ . Alors le sous-groupe de Young de  $S_n$  correspondant est

$$S_\lambda = S_{\{1,2,\dots,\lambda_1\}} \times S_{\{\lambda_1+1,\lambda_1+2,\dots,\lambda_1+\lambda_2\}} \times \dots \times S_{\{n-\lambda_k+1,n-\lambda_k+2,\dots,n\}}.$$

En général  $S_{(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k)}$  et  $S_{\lambda_1} \times S_{\lambda_2} \times \dots \times S_{\lambda_k}$  sont isomorphes comme groupes. Si nous imaginons que les  $n$  lettres  $1, 2, \dots, n$  sont des objets distincts placés dans  $k$  cellules où la  $i$ -ème cellule contient  $\lambda_i$  objets pour tout  $i = 1, \dots, k$ , alors le sous-groupe  $S_{(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k)}$  du groupe symétrique

$\mathcal{S}_n$  est le groupe constitué de toutes les permutations qui n'envoie aucun objet dehors sa cellule, i.e. une telle permutation permute les objets de chaque cellule entre eux sans les permuer avec les objets d'une autre cellule. Par exemple

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{(3,3,2,1)} &= \mathcal{S}_{\{1,2,3\}} \times \mathcal{S}_{\{4,5,6\}} \times \mathcal{S}_{\{7,8\}} \times \mathcal{S}_{\{9\}} \\ &\cong \mathcal{S}_3 \times \mathcal{S}_3 \times \mathcal{S}_2 \times \mathcal{S}_1. \end{aligned}$$

On définit une relation d'équivalence sur les  $\lambda$ -tableaux comme suit : soient  $t_1$  et  $t_2$  deux  $\lambda$ -tableaux, on dit que  $t_1$  et  $t_2$  sont lignes-équivalents si les lignes correspondantes des deux tableaux contiennent les mêmes éléments. On note alors  $t_1 \sim t_2$ . Par exemple

$$t_1 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & & \\ \hline 4 & 6 & \\ \hline 1 & 5 & 3 \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad t_2 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & & \\ \hline 6 & 4 & \\ \hline 3 & 1 & 5 \\ \hline \end{array}$$

sont lignes-équivalents, i.e.  $t_1 \sim t_2$ .

### Définition 1.52

*Un tabloïde de forme  $\lambda$  est une classe d'équivalence de  $\lambda$ -tableaux sous la relation  $\sim$ .*

Un tabloïde de forme  $\lambda$  ou un  $\lambda$ -tabloïde est donc

$$\{t\} = \{t_1 \mid t_1 \sim t\}$$

où  $t$  est un  $\lambda$ -tableau.

Pour un  $\lambda$ -tabloïde, on va utiliser une notation particulière illustrée par l'exemple suivant où  $\lambda = 321$

$$\left\{ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & & \\ \hline 4 & 6 & \\ \hline 1 & 5 & 3 \\ \hline \end{array} \right\} = \overline{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & & \\ \hline 4 & 6 & \\ \hline 1 & 5 & 3 \\ \hline \end{array}}$$

On définit naturellement une action de  $\mathcal{S}_n$  sur les  $\lambda$ -tableaux  $t : \lambda \longrightarrow [n]$  où  $\lambda \vdash n$  comme suit :

$$\sigma \cdot t : \lambda \longrightarrow [n]$$

avec

$$(\sigma \cdot t)(c) = \sigma(t(c)) \text{ pour tout } c \in \lambda,$$

i.e. on permute les entrées du tableau.

On a ainsi une action induite sur les  $\lambda$ -tabloïdes

$$\sigma \cdot \{t\} = \{\sigma \cdot t\}$$

(cette action est bien définie car elle est indépendante du choix de  $t$  dans  $\{t\}$ ) ce qui décrit un  $\mathcal{S}_n$ -module.

### Définition 1.53

Soit  $\lambda \vdash n$ ,  $\{t_1\}, \dots, \{t_k\}$  une liste exhaustive de  $\lambda$ -tabloïdes, i.e.  $\{\{t_1\}, \dots, \{t_k\}\}$  est une partition de l'ensemble de tous les  $\lambda$ -tableaux. Alors

$$M^\lambda = \mathbb{C}\{\{t_1\}, \dots, \{t_k\}\}$$

est appelé le module de permutation associé à  $\lambda$ .

$M^\lambda$  est un module cyclique (ne possède qu'une seule orbite) car chaque  $\lambda$ -tabloïde peut être transformé en un autre  $\lambda$ -tabloïde par une certaine permutation, i.e. pour tous  $\lambda$ -tabloïdes  $\{t_1\}$  et  $\{t_2\}$  il existe  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  telle que  $\sigma \cdot \{t_1\} = \{t_2\}$ . En d'autres mots,  $\mathcal{S}_n$  agit transitivement sur l'ensemble des  $\lambda$ -tabloïdes. Ainsi

$$M^\lambda = \mathbb{C}\mathcal{S}_n \{t\} = \mathbb{C}\{\sigma \cdot \{t\} \mid \sigma \in \mathcal{S}_n\}$$

pour  $\{t\}$  un  $\lambda$ -tabloïde fixé. De plus,  $\dim M^\lambda = \frac{n!}{\lambda!}$ , le nombre des  $\lambda$ -tabloïdes où si  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ , alors  $\lambda! = \lambda_1! \cdot \lambda_2! \cdot \dots \cdot \lambda_k!$ .

### Exemple 1.54

• Pour  $\lambda = (1, 1, \dots, 1)$ , chaque tabloïde contient un seul tableau qui peut être naturellement identifié à une permutation de  $[n]$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ t(1,1) & t(1,2) & \cdots & t(1,n) \end{pmatrix}$$

Cette identification est compatible avec l'action de  $S_n$  ; on a ainsi retrouvé la représentation régulière

$$M^{(1^n)} \simeq \mathbb{C}S_n.$$

- Pour  $\lambda = (n)$ , on a un seul tabloïde

1	2	...	n
---	---	-----	---

Ainsi, l'action de  $S_n$  sur  $M^{(n)}$  est triviale.

Nous allons maintenant voir comment construire de manière effective les représentations irréductibles du groupe symétrique. Nous allons pour cela associer à chaque  $\lambda \vdash n$  un  $S_n$ -module  $S^\lambda$  dont nous montrerons par la suite l'irréductibilité. On a construit le module  $M^\lambda$  ; en général  $M^\lambda$  n'est pas irréductible. Nous allons construire un sous-module irréductible de  $M^\lambda$ , noté  $S^\lambda$ , appelé un module de Specht.

Chaque tableau détermine d'une manière naturelle une copie isomorphe d'un sous-groupe de Young de  $S_n$ . On peut identifier le sous-groupe de Young

$$S_\lambda = S_{\{1,2,\dots,\lambda_1\}} \times S_{\{\lambda_1+1,\lambda_1+2,\dots,\lambda_1+\lambda_2\}} \times \dots \times S_{\{n-\lambda_k+1,n-\lambda_k+2,\dots,n\}}$$

au  $\lambda$ -tabloïde  $\{t^\lambda\}$

$$\{t^\lambda\} = \frac{\begin{array}{cccc} n - \lambda_k + 1 & n - \lambda_k + 2 & \cdots & n \\ \vdots & & & \\ \lambda_1 + 1 & \lambda_1 + 2 & \cdots & \lambda_1 + \lambda_2 \\ 1 & 2 & \cdots & \lambda_1 \end{array}}{\quad}$$

Ainsi les classes  $\sigma S_\lambda$  correspondent aux tabloïdes  $\{\sigma \cdot t^\lambda\}$ , ce qui implique que les  $S_n$ -modules  $M^\lambda = \mathbb{C}S_n \{t^\lambda\}$  et  $V^\lambda = \mathbb{C}S_n S_\lambda$  sont isomorphes.

### Définition 1.55

Soit  $t$  un tableau ayant les lignes  $R_1, R_2, \dots, R_\ell$  et les colonnes  $C_1, C_2, \dots, C_k$ . Alors

$$R_i = S_{R_1} \times S_{R_2} \times \dots \times S_{R_i} \leq S_n \text{ et } C_i = S_{C_1} \times S_{C_2} \times \dots \times S_{C_i} \leq S_n$$

sont le stabilisateur des lignes et le stabilisateur des colonnes de  $t$  respectivement.

On définit également,  $\kappa_t = \sum_{\sigma \in C_t} \text{sgn}(\sigma) \sigma \in \mathbb{C}[S_n]$ .

Notons que si  $t$  a pour colonnes  $C_1, C_2, \dots, C_k$ , alors

$$\kappa_t = \kappa_{C_1} \kappa_{C_2} \dots \kappa_{C_k} \text{ (où la multiplication est celle de } \mathbb{C}[S_n] \text{ et } \kappa_{C_i} = \sum_{\sigma \in S_{C_i}} \text{sgn}(\sigma) \sigma, \forall i \in [k])$$

### Définition 1.56

Si  $t$  est un tableau, on définit le polytabloïde associé à  $t$ , noté  $e_t$ , par

$$e_t = \kappa_t \{t\}.$$

Notons que  $e_t$  dépend du tableau  $t$  et pas seulement du tabloïde  $\{t\}$ , par exemple, on a :

$$t_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 5 \\ \hline 4 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad t_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 3 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

avec  $\{t_1\} = \{t_2\}$ . Par contre

$$\begin{aligned} C_{t_1} &= S_{\{3,4\}} \times S_{\{1,5\}} \times S_{\{2\}} \\ &= \{(3)(4), (34)\} \times \{(1)(5), (15)\} \times \{(2)\} \\ &= \{(3)(4)(1)(5)(2), (3)(4)(15)(2), (34)(1)(5)(2), (34)(15)(2)\} \\ &= \{\varepsilon, (15), (34), (34)(15)\} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \kappa_{t_1} &= \sum_{\sigma \in C_{t_1}} \text{sgn}(\sigma) \sigma \\ &= \varepsilon - (15) - (34) + (34)(15) \\ &= (\varepsilon - (15))(\varepsilon - (34)) \end{aligned}$$

Donc

$$e_{t_1} = \frac{\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 5 \\ \hline 4 & 1 \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}} - \frac{\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 1 \\ \hline 4 & 5 \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 5 & 2 \\ \hline \end{array}} - \frac{\begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 5 \\ \hline 3 & 1 \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}} + \frac{\begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 1 \\ \hline 3 & 5 \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 5 & 2 \\ \hline \end{array}}$$

De la même manière, on obtient

$$\begin{aligned}
 C_{t_2} &= S_{\{2,5\}} \times S_{\{1,3\}} \times S_{\{4\}} \\
 &= \{(2)(5), (25)\} \times \{(1)(3), (13)\} \times \{(4)\} \\
 &= \{(2)(5)(1)(3)(4), (2)(5)(13)(4), (25)(1)(3)(4), (25)(13)(4)\} \\
 &= \{\varepsilon, (13), (25), (25)(13)\}
 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
 \kappa_{t_2} &= \sum_{\sigma \in C_{t_2}} \text{sgn}(\sigma) \sigma \\
 &= \varepsilon - (13) - (25) + (25)(13) \\
 &= (\varepsilon - (13))(\varepsilon - (25))
 \end{aligned}$$

Donc

$$e_{t_2} = \frac{\begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 3 \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 4 \\ \hline \end{array}} - \frac{\begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 1 \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array}} - \frac{\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 5 & 1 & 4 \\ \hline \end{array}} + \frac{\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 5 & 3 & 4 \\ \hline \end{array}}$$

Par conséquent, il est clair que  $e_{t_1} \neq e_{t_2}$  bien que  $\{t_1\} = \{t_2\}$ .

Le lemme suivant donne le comportement de ces objets lorsqu'on passe de  $t$  à  $\sigma \cdot t$ .

**Lemme 1.57**

Soit  $t$  un tableau de forme  $\lambda \vdash n$  et  $\sigma \in S_n$ , alors :

$$1. C_{\sigma \cdot t} = \sigma C_t \sigma^{-1}$$

$$2. \kappa_{\sigma \cdot t} = \sigma \kappa_t \sigma^{-1}$$

$$3. e_{\sigma \cdot t} = \sigma e_t.$$

En faisant agir une permutation  $\sigma$  sur un polytabloïde  $e_t$ , on obtient un autre polytabloïde  $e_{\sigma \cdot t}$ .

Ceci motive la définition suivante :

**Définition 1.58**

Soit  $\lambda \vdash n$ . Le module de Specht associé à  $\lambda$ , qu'on note  $S^\lambda$ , est le sous-module de  $M^\lambda$  engendré par l'ensemble  $\{e_t \mid t \text{ est un } \lambda\text{-tableau}\}$

La partie 3 du lemme 1.57 montre que  $S^\lambda$  est un module cyclique engendré par n'importe quel polytabloïde, i.e.

$$S^\lambda = \mathbb{C} S_n e_t,$$

où  $t$  est un  $\lambda$ -tableau fixé.

### Exemple 1.59

Reprenons l'exemple 1.53 où nous avons décrit les modules  $M^{(\lambda)}$  pour  $\lambda = (1^n)$  et  $\lambda = (n)$  et décrivons maintenant les modules  $S^\lambda$ .

- Pour  $\lambda = (1^n)$ . Fixons

$$t = \begin{array}{|c|} \hline n \\ \hline \vdots \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}$$

On a  $C_t = S_n$  et donc  $\kappa_t = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \sigma$ . En associant, tel qu'à l'exemple 1.54, à chaque permutation un tabloïde, on a alors que  $e_t$  est la somme signée de toutes les permutations de  $n$  éléments. Ainsi, pour  $\sigma \in S_n$ , le lemme 1.57 nous donne

$$\begin{aligned} e_{\sigma \cdot t} &= \sigma e_t \\ &= \sigma \left( \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn}(\pi) \pi \right) \{t\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_{\sigma \cdot t} &= \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn}(\pi) \sigma \pi \{t\} \\ &= \sum_{\tau \in S_n} \text{sgn}(\sigma^{-1} \tau) \tau \{t\} \text{ où } \tau = \sigma \pi \\ &= \text{sgn}(\sigma^{-1}) \sum_{\tau \in S_n} \text{sgn}(\tau) \tau \{t\} \text{ car } \text{sgn}(\sigma^{-1} \tau) = \text{sgn}(\sigma^{-1}) \text{sgn}(\tau) \\ &= \text{sgn}(\sigma) e_t \text{ car } \text{sgn}(\sigma) = \text{sgn}(\sigma^{-1}). \end{aligned}$$

Par conséquent, tous les polytabloïdes sont des multiples scalaires de  $e_t$  et donc

$$S^{(1^n)} = \mathbb{C} \{e_t\}.$$

L'action de  $S_n$  est donnée par

$$\sigma \cdot t = \text{sgn}(\sigma) e_t.$$



Il s'agit ainsi de la représentation alternée.

- Pour  $\lambda = (n)$ . On a vu dans l'exemple 1.54 qu'il n'y avait alors qu'un seul tabloïde  $t$  de forme  $\lambda$  et donc que  $M^{(n)} = \mathbb{C}\{t\}$  sur lequel  $S_n$  agit trivialement. Puisque  $S^{(n)}$  est un sous-module de  $M^{(n)}$ , on doit nécessairement avoir  $S^{(n)} = M^{(n)}$ .

Maintenant, nous affirmons que les modules de Specht décrivent exactement toutes les représentations irréductibles des groupes symétriques. Rappelons d'abord, d'après le théorème 1.48, que le nombre de représentations irréductibles de  $S_n$  est égal à son nombre de classes de conjugaison. Les classes de conjugaison de  $S_n$  sont données par le résultat classique suivant :

**Proposition 1.60**

*Soit  $n$  un entier. Deux permutations de  $S_n$  sont conjuguées si et seulement si elles ont même type cyclique.*

Il résulte de cette proposition que le nombre de classes de conjugaison de  $S_n$  est égal au nombre de types cycliques distincts possibles pour une permutation de  $S_n$ , i.e. au nombre de partages de  $n$ . Cela montre donc que le nombre de représentations irréductibles distinctes (à isomorphisme près) de  $S_n$  n'est autre que le nombre de partages de  $n$  (voir théorème 1.48). Comme les modules de Specht sont indexés par les partages et comme un module de Specht est irréductible, alors il suffira de montrer qu'il s'agit de modules deux à deux non isomorphes pour établir qu'ils décrivent bien l'ensemble des représentations irréductibles d'un groupe symétrique donné. C'est ce que donne la proposition suivante :

**Proposition 1.61**

*Soit  $n$  un entier. Les modules de Specht associés aux différents partages de  $n$  sont deux à deux non isomorphes.*

Nous pouvons maintenant résumer ce qui précède par le résultat suivant :

**Corollaire 1.62**

*Soit  $n$  un entier. Les modules de Specht  $(S^\lambda)_{\lambda \vdash n}$  forment un système complet de  $S_n$ -modules irréductibles. Autrement dit, les modules de Specht vérifient les propriétés suivantes :*

- tout  $S_n$ -module irréductible est isomorphe à un unique module de Specht  $S^\lambda$  (où  $\lambda$  est un partage de  $n$ ),

- pour tout partage  $\lambda \vdash n$ , le module de Specht  $S^\lambda$  associé est un  $S_n$ -module irréductible.

Nous avons vu que les modules de Specht décrivent exactement toutes les représentations irréductibles des groupes symétriques. Il reste cependant à pouvoir appliquer ce résultat à l'obtention explicite de matrices de représentations associées aux différentes représentations irréductibles de  $S_n$ . Pour cela, il est nécessaire de pouvoir disposer d'une base pour chaque module de Specht. Dans le cas de  $S^\lambda$ , on peut trouver une base de façon très naturelle.

### **Théorème 1.63**

*L'ensemble  $\{e_t \mid t \text{ est un } \lambda\text{-tableau standard}\}$  est une base de  $S^\lambda$ .*

Rappelons que si  $t$  est un tableau standard, on dira que le tabloïde  $\{t\}$  et le polytabloïde  $e_t$  sont standards. Remarquons qu'un tabloïde standard contient un et un seul tableau standard (puisque l'on doit absolument ordonner les lignes de façon à ce que les entrées soient croissantes) mais que dans la somme définissant un polytabloïde standard, plus d'un tableau standard peut apparaître.

Le résultat suivant, qui découle directement du théorème 1.63, donne les dimensions des représentations irréductibles des groupes symétriques.

### **Corollaire 1.64**

*Soit  $\lambda$  un partage de  $n$ . La dimension du module de Specht  $S^\lambda$  est le nombre  $f_\lambda$  de tableaux de Young standards de forme  $\lambda$ .*

L'identité obtenue en prenant la somme des dimensions des représentations irréductibles intervenant dans la décomposition de la représentation régulière d'un groupe symétrique donné en somme directe de représentations irréductibles conduit au résultat suivant (voir corollaire 1.50) :

### **Corollaire 1.65**

*Pour tout entier, on a l'identité suivante :*

$$\sum_{\lambda \vdash n} f_\lambda^2 = n!,$$

où  $f_\lambda$  désigne le nombre de tableaux de Young standards de forme  $\lambda$ .

## CHAPITRE II

### CORRESPONDANCE DE ROBINSON-SCHENSTED.

La correspondance entre permutations et paires de tableaux de Young standards de même forme, introduite en 1938 par G. de B. Robinson dans la théorie des représentations du groupe symétrique et redécouverte autour des années soixante sous une forme un peu différente par C. Schensted, a été depuis étudiée en elle-même par divers auteurs qui lui ont découvert une série de propriétés combinatoires curieuses ou utiles pour l'étude des fonctions symétriques. Plus précisément, on a introduit un algorithme permettant d'associer de manière bijective à toute permutation  $\sigma = x_1 x_2 \dots x_n$  une paire  $(P, Q)$  de tableaux de Young standards de même forme sur  $n$  éléments. Cette bijection donne une preuve constructive de l'identité

$$n! = \sum_{\lambda} (f_{\lambda})^2, \quad (2.1)$$

où la somme du second membre est étendue à tous les partages  $\lambda$  de l'entier  $n$  et où  $f_{\lambda}$  désigne le nombre de tableaux de Young standards de forme  $\lambda$ . Notons que le nombre  $f_{\lambda}$  est égal au degré de la représentation irréductible du groupe symétrique  $S_n$ , sur le corps des complexes  $\mathbb{C}$ , associée à  $\lambda$  (voir Chapitre I, Corollaire 1.64). L'identité (2.1) exprime qu'il existe une bijection entre  $S_n$  et les paires de tableaux de Young standards de même forme. L'algorithme de Robinson-Schensted associe de manière explicite une telle paire  $(P(\sigma), Q(\sigma))$  à toute permutation  $\sigma$  de  $S_n$ . Dans ce présent chapitre, nous nous proposons de donner un exposé systématique des principaux résultats.

Soit  $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k > 0)$  un partage de l'entier  $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k$ . Rappelons qu'un tableau standard à  $n$  éléments, de forme  $\lambda$ , est un tableau indexé

$$P = \{P_{ij} \mid 1 \leq i \leq k \text{ et } 1 \leq j \leq \lambda_i\}$$

tel que :

- (i) les éléments  $P_{ij}$  sont des entiers, strictement positifs distincts.
- (ii) chaque ligne (de gauche à droite) et chaque colonne (de bas en haut) forme une suite strictement croissante.

Par exemple, le tableau

11			
4	8		
2	5	7	9

est un tableau standard à 7 éléments, de forme 421.

Lorsque les éléments  $P_{ij}$  sont exactement les entiers  $1, 2, \dots, n$ , alors le tableau  $P$  est un tableau de Young standard de forme  $\lambda$ . Par exemple, le tableau

5			
2	6		
1	3	4	7

est un tableau de Young standard de forme 421.

Rappelons que  $\mathcal{D}_n$  désigne l'ensemble des tableaux de Young standards à  $n$  éléments et que  $\mathcal{D}_n^0$  désigne l'ensemble des tableaux standards dont les entrées  $P_{ij}$  sont des nombres  $\leq n$ , i.e.  $\mathcal{D}_n^0$  est l'ensemble des tableaux standards à  $k$  éléments avec  $k \leq n$  et à valeurs dans  $A$  où  $A \subseteq [n]$ .

## 2.1 Algorithme d'insertion

Il existe plusieurs versions de l'algorithme de Robinson-Schensted qui décrit le passage d'une permutation  $\sigma$  de l'ensemble  $[n]$  à un couple  $(P(\sigma), Q(\sigma))$  de tableaux de Young standards à  $n$  éléments de même forme. Cet algorithme se réalise par une suite d'insertions ; nous donnons la version utilisant l'insertion ligne.

Supposons qu'on veuille insérer l'élément 8 dans le tableau  $P$  où

$P =$

17					
11					
4	13	14			
2	6	10	15		
1	3	5	9	12	16

L'élément 8 remplace l'élément 9 dans la première ligne, car 9 est le plus petit élément supérieur à 8 dans cette ligne. L'élément 9 est éjecté en haut à la deuxième ligne où il remplace l'élément 10. L'élément 10 remplace l'élément 13 qui sera éjecté de la troisième ligne à la quatrième ligne ; et puisque la quatrième ligne ne contient aucun élément supérieur à 13, le processus termine, en ajoutant 13 dans une nouvelle case à la fin de cette ligne. Alors le tableau  $P$  est transformé en le tableau  $P'$  où

$$P' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 17 & & & & & \\ \hline 11 & 13 & & & & \\ \hline 4 & 10 & 14 & & & \\ \hline 2 & 6 & 9 & 15 & & \\ \hline 1 & 3 & 5 & 8 & 12 & 16 \\ \hline \end{array}$$

Une description précise de ce processus, accompagnée d'une preuve qu'il préserve les propriétés des tableaux, apparaît dans l'algorithme suivant :

### Définition 2.1 : Algorithme d'insertion

Soit  $P = \{P_{ij}\}$ , où  $i, j \geq 1$ , un tableau standard à  $n$  éléments et  $x$  un entier distinct des entiers  $P_{ij}$ . L'algorithme d'insertion de  $x$  dans  $P$  définit un nouveau tableau à  $(n + 1)$  éléments, qu'on note  $P \leftarrow x$ , de la manière suivante :

- (i) Si  $P$  est vide, alors  $P \leftarrow x$  est le tableau à un seul élément  $P_{11} = x$ .
- (ii) Pour  $P$  non vide,  $P \leftarrow x$  est défini de manière récursive de la façon suivante :
  - si  $x$  est plus grand que tous les éléments de la première ligne de  $P$ , on ajoute  $x$  à la fin de cette ligne,
  - sinon, soit  $y$  le plus petit des éléments, de la première ligne, supérieurs à  $x$ . On remplace  $y$  par  $x$  et on insère  $y$  selon les règles (i) et (ii) dans le tableau obtenu à partir de  $P$  en supprimant la première ligne.

Autrement dit, l'insertion d'un élément  $x$  se fait récursivement sur les lignes en remplaçant l'entier  $y$  le plus petit supérieur à  $x$  (sur la ligne courante) par  $x$  et en insérant l'entier  $y$  sur la ligne suivante. Le processus débute par insertion sur la première ligne et s'arrête lorsque l'entier inséré ne prend la place d'aucun autre (création d'une nouvelle ligne supérieure ou insertion en fin d'une ligne).

**Exemple 2.2**

Si  $T$  est le tableau

11				
4	8			
2	5	7	9	

et si  $x = 6$ , alors

$$T \leftarrow 6 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 11 & & & & \\ \hline 8 & & & & \\ \hline 4 & 7 & & & \\ \hline 2 & 5 & 6 & 9 & \\ \hline \end{array}$$

L'algorithme d'insertion transforme le tableau  $P$  en un autre tableau qui contient  $x$  ainsi que tous les éléments de  $P$ . Ce nouveau tableau  $P \leftarrow x$  a la même forme que  $P$  à l'exception de l'addition d'une nouvelle case  $(s, t)$ , où  $s$  et  $t$  sont des quantités déterminées par cet algorithme.

Soit  $P = \{P_{ij}\}$ , où  $i, j \geq 1$ , un tableau standard. Par commodité pour la suite de ce travail, nous allons supposer que ce tableau a des zéros sur les bords en bas et à gauche et a des  $+\infty$  en haut et à droite, ainsi  $P_{ij}$  est défini pour tous  $i, j \geq 0$  (voir la figure 2.1 ci-dessous).

	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	.....
0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	.....
0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	.....
0	17	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	.....
0	11	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	.....
0	4	13	14	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	.....
0	2	6	10	15	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	.....
0	1	3	5	9	12	16	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	.....
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	.....

**Figure 2.1** Le tableau  $P$  avec des zéros sur les bords en bas et à gauche et des  $+\infty$  en haut et à droite.

Définissons la relation

$$a \lesssim b \text{ si et seulement si } a < b \text{ ou } a = b = 0 \text{ ou } a = b = +\infty,$$

ainsi, on peut déduire que

$$P_{ij} = 0 \text{ si et seulement si } i = 0 \text{ ou } j = 0$$

et que

$$P_{ij} \lesssim P_{i(j+1)} \text{ et } P_{ij} \lesssim P_{(i+1)j} \text{ pour tous } i, j \geq 0. \quad (2.2)$$

L'écriture " $x \notin P$ ", i.e.  $x$  n'est pas un élément de  $P$ , signifie que  $x = +\infty$  ou  $x \neq P_{ij}$  pour tous  $i, j \geq 0$ . Ainsi, si  $b$  est un élément du tableau  $\{P_{ij}\}_{i,j \geq 0}$  alors  $0 \lesssim b$  car  $0 < b$  ou  $0 = b$ .

La relation (2.2), vérifiée par le tableau  $\{P_{ij}\}_{i,j \geq 0}$ , remplace la condition de croissance stricte en ligne et en colonne ( $P_{ij} < P_{i(j+1)}$  et  $P_{ij} < P_{(i+1)j}$  pour tous  $i, j \geq 1$ ) vérifiée par le tableau standard  $\{P_{ij}\}_{i,j \geq 1}$  et montre que le tableau  $\{P_{ij}\}_{i,j \geq 0}$  peut être considéré comme un tableau standard selon le sens donné par cette relation.

Maintenant, on peut décrire l'insertion de l'élément  $x$  dans le tableau  $P$  par les étapes suivantes :

**Étape 1 : Faire entrer  $x$**

On pose  $i = 1$ ,  $x_1 = x$  et  $j$  égal la plus petite valeur pour laquelle  $P_{1j} = +\infty$ .

**Étape 2 : Trouver  $x_{i+1}$**

Le point  $x_i$  n'appartient pas à  $P$ .

Si  $P_{i(j-1)} < x_i < P_{ij}$ , alors on pose  $x_{i+1} = P_{ij}$  et  $r_i = j$ .

Si  $x_i < P_{i(j-1)}$ , alors on remplace  $j$  par  $(j - 1)$  et on répète cette étape.

**Étape 3 : Remplacer par  $x_i$**

Maintenant,

$$P_{i(j-1)} < x_i < x_{i+1} = P_{ij} \lesssim P_{i(j+1)}, P_{(i-1)j} < x_i < x_{i+1} = P_{ij} \lesssim P_{(i+1)j} \text{ et } r_i = j.$$

On remplace  $P_{ij}$  par  $x_i$ .

**Étape 4 :** *Est-ce-que  $x_{i+1} = +\infty$ ?*

Maintenant,

$$P_{i(j-1)} < P_{ij} = x_i < x_{i+1} \lesssim P_{i(j+1)}, P_{(i-1)j} < P_{ij} = x_i < x_{i+1} \lesssim P_{(i+1)j}, r_i = j$$

et

$$x_{i+1} \notin P.$$

Si  $x_{i+1} \neq +\infty$ , on remplace  $i$  par  $(i+1)$  et on revient à l'étape 2.

**Étape 5 :** *Déterminer  $s$  et  $t$*

Maintenant,

$$x_{i+1} = P_{ij} = +\infty.$$

On remplace  $P_{ij}$  par  $x_i$ . On pose  $s = i$  et  $t = j$  et cet algorithme est terminé. Les conditions

$$P_{st} = x_i \neq +\infty \text{ et } P_{(s+1)t} = P_{s(t+1)} = +\infty$$

sont satisfaites.

L'algorithme d'insertion définit une suite "d'éléments éjectés"

$$x = x_1 < x_2 < \dots < x_s < x_{s+1} = +\infty,$$

ainsi qu'une suite auxiliaire d'indices de colonnes

$$r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_s = t.$$

L'élément  $P_{ir_i}$  a changé de  $x_{i+1}$  à  $x_i$  pour tout  $1 \leq i \leq s$ .

Lorsqu'on a inséré l'élément 8 dans le tableau  $P$ , donné dans la figure 2.1 ci-dessus, la suite "d'éléments éjectés" est 8, 9, 10, 13,  $+\infty$  et la suite auxiliaire est 4, 3, 3, 2. En effet, posons  $i = 1$ ,  $x_1 = 8$  et  $j = 7$  (car  $P_{16} = 16$  et  $P_{17} = +\infty$ ). Comme

$$16 (= P_{16}) \not< 8 (= x_1) < +\infty (= P_{17}),$$

alors, d'après l'étape 2 précédente, on remplace  $j$  par 6. Mais

$$12 (= P_{15}) \not< 8 (= x_1) < 16 (= P_{16}),$$



donc, on remplace  $j$  par 5. Pour  $j = 5$ , on a

$$9 (= P_{14}) \not\prec 8 (= x_1) < 12 (= P_{15}),$$

ainsi, on remplace  $j$  par 4 et on obtient

$$5 (= P_{13}) < 8 (= x_1) < 9 (= P_{14}).$$

L'étape suivante consiste à poser  $x_2 = P_{14}$ , i.e.  $x_2 = 9$  et  $r_1 = 4$ . Ensuite, on remplace  $P_{14}$  par  $x_1$ , i.e. on remplace 9 par 8.

L'élément 8 remplace l'élément 9 dans la première ligne et l'élément 9 est éjecté en haut à la deuxième ligne. Comme  $x_2 = 9 \neq +\infty$ , alors on pose  $i = 2$  et  $j = 5$  (car  $P_{24} = 15$  et  $P_{25} = +\infty$ ).

On a

$$15 (= P_{24}) \not\prec 9 (= x_2) < +\infty (= P_{25}),$$

donc, on remplace  $j$  par 4. Pour  $j = 4$ , on a

$$10 (= P_{23}) \not\prec 9 (= x_2) < 15 (= P_{24}),$$

ainsi, on remplace  $j$  par 3 et on obtient

$$6 (= P_{22}) < 9 (= x_2) < 10 (= P_{23}).$$

L'étape suivante consiste à poser  $x_3 = P_{23}$ , i.e.  $x_3 = 10$  et  $r_2 = 3$ . Ensuite, on remplace  $P_{23}$  par  $x_2$ , i.e. on remplace 10 par 9.

L'élément 9 remplace l'élément 10 dans la deuxième ligne et l'élément 10 est éjecté en haut à la troisième ligne. Comme  $x_3 = 10 \neq +\infty$ , alors on pose  $i = 3$  et  $j = 4$  (car  $P_{33} = 14$  et  $P_{34} = +\infty$ ). On a

$$14 (= P_{33}) \not\prec 10 (= x_3) < +\infty (= P_{34}),$$

donc, on remplace  $j$  par 3. Pour  $j = 3$ , on a

$$13 (= P_{32}) \not\prec 10 (= x_3) < 14 (= P_{33}),$$

ainsi, on remplace  $j$  par 2 et on obtient

$$4 (= P_{31}) < 10 (= x_3) < 13 (= P_{32}).$$

L'étape suivante consiste à poser  $x_4 = P_{32}$ , i.e.  $x_4 = 13$  et  $r_3 = 2$ . Ensuite, on remplace  $P_{32}$  par  $x_3$ , i.e. on remplace 13 par 10.

L'élément 10 remplace l'élément 13 dans la troisième ligne et l'élément 13 est éjecté en haut à la quatrième ligne. Comme  $x_4 = 13 \neq +\infty$ , alors on pose  $i = 4$  et  $j = 2$  (car  $P_{41} = 11$  et  $P_{42} = +\infty$ ). On a

$$11 (= P_{41}) < 13 (= x_4) + \infty (= P_{42}),$$

donc, on pose  $x_5 = P_{42}$ , i.e.  $x_5 = +\infty$  et  $r_4 = 2$ . Ensuite, on remplace  $P_{42}$  par  $x_4$ , i.e.  $+\infty$  par 13. Par conséquent, l'élément 13 est ajouté dans une nouvelle case à la fin de la quatrième ligne. Comme  $x_5 = +\infty$ , alors le processus est terminé et on a  $s = i = 4$  et  $t = j = 2$ . Remarquons que les conditions de la dernière étape (étape 5) de l'algorithme d'insertion sont satisfaites. En effet,

$$P_{42} = 13 \neq +\infty \text{ et } P_{43} = P_{52} = +\infty.$$

## 2.2 Algorithme de suppression

L'insertion de l'élément 8 dans le tableau  $P$ , donné dans la figure 2.1 ci-dessus, a transformé le tableau  $P$  en un tableau  $P'$ , i.e.  $P' = P \leftarrow 8$ . Il existe un algorithme qui va transformer le tableau  $P'$  en le tableau  $P$ , cet algorithme est d'une certaine manière l'algorithme inverse de l'algorithme d'insertion. En effet, en se donnant les valeurs de  $s$  et  $t$  déterminées à l'étape 5 de l'algorithme d'insertion, on peut transformer le tableau  $P'$  en  $P$  en supprimant l'élément  $x$  qui a été inséré.

L'étape 5 d'insertion de l'élément 8 dans le tableau  $P$ , donné ci-dessus, montre que  $s = 4$ ,  $t = 2$  et  $P'_{42} = 13$ . Ainsi, l'élément 13 est éjecté en bas, à la troisième ligne où il remplace 10, car 10 est le plus grand élément inférieur à 13 dans cette ligne. D'une manière similaire, 10 est éjecté en bas et remplace 9 qui est éjecté en bas et remplace l'élément 8. Ainsi le tableau  $P'$  est transformé en le tableau  $P$ .

L'algorithme suivant spécifie ce processus en détails.

### Définition 2.3 : Algorithme de suppression

Soit  $P = \{P_{ij}\}$ , où  $i, j \geq 1$ , un tableau standard à  $n$  éléments. Soit  $P = \{P_{ij}\}$ , où  $i, j \geq 0$ , le tableau obtenu de  $P$  en lui ajoutant des zéros sur les bords en bas et à gauche et des  $+\infty$  en

haut et à droite (voir la figure 2.1 ci-dessus). Soient  $s$  et  $t$  des entiers strictement positifs tels que

$$P_{st} \neq +\infty \text{ et } P_{(s+1)t} = P_{s(t+1)} = +\infty.$$

L'algorithme de suppression définit un nouveau tableau à  $(n-1)$  éléments de la manière suivante :

- si  $s = 1$ , alors le nouveau tableau est obtenu du tableau  $P$  en supprimant l'élément  $P_{1t}$  qui se trouve à la fin de la première ligne.
- sinon, soit  $y_1$  le plus grand des éléments de la ligne  $(s-1)$  inférieur à  $P_{st}$  (un tel élément  $y_1$  existe toujours car l'élément dans la ligne  $(s-1)$  qui est situé directement au-dessous de  $P_{st}$  est inférieur à  $P_{st}$ ). On retire l'élément  $P_{st}$  de la ligne  $s$  de  $P$  et on remplace  $y_1$  par  $P_{st}$  et on supprime  $y_1$  sur la ligne  $(s-1)$ . Si  $(s-1) = 1$ , alors le nouveau tableau est obtenu en supprimant  $y_1$ . Sinon, soit  $y_2$  le plus grand des éléments de la ligne  $(s-2)$  inférieur à  $y_1$ , on remplace  $y_2$  par  $y_1$  et on supprime  $y_2$  sur la ligne  $(s-2)$ .

On continue ce processus qui va s'arrêter lorsque un entier  $y_j$ , pour un certain  $j \geq 1$ , est éjecté du tableau  $P$ .

L'algorithme de suppression transforme le tableau  $P$  en un autre tableau avec la même forme à l'exception d'avoir  $+\infty$  dans la case  $(s, t)$ . Un élément  $x$  déterminé par cet algorithme est supprimé de  $P$ .

On peut décrire cet algorithme par les étapes suivantes :

**Étape 1 :** Faire entrer  $s, t$

On pose  $j = t$ ,  $i = s$  et  $x_{s+1} = +\infty$ .

**Étape 2 :** Trouver  $x_i$

Le point  $x_{i+1}$  n'appartient pas à  $P$ .

Si  $P_{i(j+1)} < x_{i+1}$ , alors on remplace  $j$  par  $(j+1)$  et on répète cette étape.

Sinon, on pose  $x_i = P_{ij}$  et  $r_i = j$ .

**Étape 3 :** Remplacer par  $x_{i+1}$

Maintenant,

$$P_{i(j-1)} < P_{ij} = x_i < x_{i+1} \lesssim P_{i(j+1)}, P_{(i-1)j} < P_{ij} = x_i < x_{i+1} \lesssim P_{(i+1)j} \text{ et } r_i = j.$$

On remplace  $P_{ij}$  par  $x_{i+1}$ .

**Étape 4 :** *Est-ce-que  $i = 1$ ?*

Maintenant,

$$P_{i(j-1)} < x_i < x_{i+1} = P_{ij} \lesssim P_{i(j+1)}, P_{(i-1)j} < x_i < x_{i+1} = P_{ij} \lesssim P_{(i+1)j} \text{ et } r_i = j$$

Si  $i > 1$ , on remplace  $i$  par  $(i - 1)$  et on revient à l'étape 2.

**Étape 5 :** *Déterminer  $x$*

On pose  $x = x_1$  et cet algorithme est terminé ( $0 < x < +\infty$ ).

Pour le tableau  $P'$ , donné ci-dessus, et d'après l'étape 5 de l'algorithme d'insertion de l'élément 8 dans le tableau  $P$ , on a :

$$j = t = 2, i = s = 4 \text{ et } x_{s+1} = x_5 = +\infty.$$

Comme

$$+\infty (= P'_{43}) \not\prec +\infty (= x_5),$$

alors, on pose  $x_4 = P'_{42}$ , i.e.  $x_4 = 13$  et  $r_4 = 2$ .

On remplace  $P'_{42}$  par  $x_5$ , i.e. 13 par  $+\infty$ . L'élément  $+\infty$  remplace l'élément 13 dans la quatrième ligne et l'élément 13 est éjecté en bas à la troisième ligne.

Comme  $i = 4 \neq 1$ , alors on remplace  $i$  par 3. On a  $i = 3$  et  $j = 2$  et

$$14 (= P'_{33}) \not\prec 13 (= x_4),$$

donc, on pose  $x_3 = P'_{32}$ , i.e.  $x_3 = 10$  et  $r_3 = 2$ .

On remplace  $P'_{32}$  par  $x_4$ , i.e. 10 par 13. L'élément 13 remplace l'élément 10 dans la troisième ligne et l'élément 10 est éjecté en bas à la deuxième ligne.

Comme  $i = 3 \neq 1$ , alors on remplace  $i$  par 2. On a  $i = 2$  et  $j = 2$  et

$$9 (= P'_{23}) < 10 (= x_3) < 15 (= P'_{24}),$$

alors on remplace  $j$  par 3, ainsi  $i = 2$  et  $j = 3$  et

$$15 (= P'_{24}) \not\prec 10 (= x_3),$$

donc, on pose  $x_2 = P'_{23}$ , i.e.  $x_2 = 9$  et  $r_2 = 3$ .

On remplace  $P'_{23}$  par  $x_2$ , i.e. 9 par 10. L'élément 10 remplace l'élément 9 dans la deuxième ligne et l'élément 9 est éjecté en bas à la première ligne.

Comme  $i = 2 \neq 1$ , alors on remplace  $i$  par 1. On a  $i = 1$  et  $j = 3$  et

$$8 (= P'_{14}) < 9 (= x_2) < 12 (= P'_{15}),$$

alors on remplace  $j$  par 4, ainsi  $i = 1$  et  $j = 4$  et

$$12 (= P'_{15}) \not\prec 9 (= x_2),$$

donc, on pose  $x_1 = P'_{14}$ , i.e.  $x_1 = 8$  et  $r_1 \leftarrow 4$ .

On remplace  $P'_{14}$  par  $x_1$ , i.e. 8 par 9. L'élément 9 remplace l'élément 8 dans la première ligne et l'élément 8 est éjecté du tableau  $P'$  et ainsi on obtient le tableau  $P$ .

## 2.3 Algorithme de Robinson-Schensted

L'algorithme de Robinson-Schensted est l'algorithme qui décrit le passage d'une permutation  $\sigma$  de l'ensemble  $[n]$  à un couple  $(P(\sigma), Q(\sigma))$  de tableaux de Young standards à  $n$  éléments de même forme. Cet algorithme est donné par la définition suivante :

### Définition 2.4

Soit  $\sigma = x_1 x_2 \dots x_n$  une permutation. On lui fait correspondre deux suites

$$(P_0, P_1, \dots, P_n) \text{ et } (Q_0, Q_1, \dots, Q_n)$$

de tableaux de Young standards, définis par les conditions (i) et (ii) suivantes :

(i)  $P_0$  est le tableau vide et  $P_k = P_{k-1} \leftarrow x_k$  pour tout  $k = 1, 2, \dots, n$ ,

(ii)  $Q_0$  est le tableau vide et pour chaque  $k = 1, 2, \dots, n$ , notons  $(i_k, j_k)$  la nouvelle case qu'on a ajouté à  $P_{k-1}$  en lui appliquant l'algorithme d'insertion. Le tableau  $Q_k$  est alors obtenu en ajoutant à  $Q_{k-1}$  la case  $(i_k, j_k)$  et en la remplissant avec la valeur  $k$ , i.e.  $(Q_k)_{(i_k+1)(j_k+1)} = k$ .

Posons  $P_n = P(\sigma)$  et  $Q_n = Q(\sigma)$ . La paire  $(P(\sigma), Q(\sigma))$  est alors la paire de tableaux de Young standards associée à  $\sigma$  par l'algorithme de Robinson-Schensted.

Autrement dit, prenons la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}.$$

On insère l'image de cette permutation de gauche à droite dans un tableau  $P$  au départ vide, et on construit parallèlement un tableau  $Q$  indiquant l'ordre d'apparition des cellules du tableau  $P$ . Les tableaux obtenus sont notés respectivement  $P(\sigma)$  et  $Q(\sigma)$ .

### Exemple 2.5

Soit  $\sigma = 3641725$  une permutation de l'ensemble  $[7]$ . L'algorithme décrit par (i) et (ii) donne les paires  $(P_k, Q_k)$  suivantes :

$k$	$P_k$	$Q_k$										
0	$\emptyset$	$\emptyset$										
1	<table><tr><td>3</td></tr></table>	3	<table><tr><td>1</td></tr></table>	1								
3												
1												
2	<table><tr><td>3</td><td>6</td></tr></table>	3	6	<table><tr><td>1</td><td>2</td></tr></table>	1	2						
3	6											
1	2											
3	<table><tr><td>6</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td></tr></table>	6	3	4	<table><tr><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td></tr></table>	3	1	2				
6												
3	4											
3												
1	2											
4	<table><tr><td>6</td></tr><tr><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>4</td></tr></table>	6	3	1	4	<table><tr><td>4</td></tr><tr><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td></tr></table>	4	3	1	2		
6												
3												
1	4											
4												
3												
1	2											
5	<table><tr><td>6</td></tr><tr><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>4</td><td>7</td></tr></table>	6	3	1	4	7	<table><tr><td>4</td></tr><tr><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>5</td></tr></table>	4	3	1	2	5
6												
3												
1	4	7										
4												
3												
1	2	5										

$k$	$P_k$	$Q_k$																		
6	<table border="1"> <tr><td>6</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td>4</td><td></td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>7</td></tr> </table>	6			3	4		1	2	7	<table border="1"> <tr><td>4</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td>6</td><td></td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>5</td></tr> </table>	4			3	6		1	2	5
6																				
3	4																			
1	2	7																		
4																				
3	6																			
1	2	5																		
7	<table border="1"> <tr><td>6</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td>4</td><td>7</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>5</td></tr> </table>	6			3	4	7	1	2	5	<table border="1"> <tr><td>4</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td>6</td><td>7</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>5</td></tr> </table>	4			3	6	7	1	2	5
6																				
3	4	7																		
1	2	5																		
4																				
3	6	7																		
1	2	5																		

et on écrit

$$3641725 \mapsto \pi \left( \begin{pmatrix} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & & \\ \hline 3 & 4 & 7 \\ \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & & \\ \hline 3 & 6 & 7 \\ \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline \end{array} \right).$$

De même, la correspondance inverse de Robinson-Schensted, i.e. le passage d'un couple  $(P, Q)$  de tableaux de Young standards de même forme à une permutation  $\sigma$  peut être définie comme suit :

### Définition 2.6

Soit  $(P, Q)$  une paire de tableaux de Young standards de même forme à  $n$  éléments, on lui fait correspondre une permutation  $\sigma = x_1 x_2 \dots x_n$  définie comme suit :

On épluche  $P$  en partant de la plus grande cellule de  $Q$  jusqu'à sa plus petite. On retire donc récursivement un  $i$  d'une ligne de  $P$ , en remplaçant le plus grand entier  $j$  inférieur à  $i$  par  $i$  et on supprime  $j$  sur la ligne inférieure. Le processus s'arrête lorsque un entier est éjecté du tableau. La suite des entiers éjectés forme la permutation  $\sigma$ , i.e. la suite des éléments éjectés est exactement la suite  $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$ . Plus précisément, on construit une suite  $(P_n, P_{n-1}, \dots, P_0)$  de tableaux de Young standards définie par les conditions :

$P_n = P$  et  $P_{k-1}$  est obtenu à partir de  $P_k$  par l'algorithme de suppression en prenant pour  $s$  et  $t$  les entiers qui vérifient  $Q_{(s+1)(t+1)} = k$ , i.e. la case  $(s, t)$  est remplie par la valeur  $k$ , pour tout  $k = 1, \dots, n$ . Un élément  $x_k$  déterminé par cet algorithme est supprimé de  $P_k$ .

**Exemple 2.7**

Soit

$$(P, Q) = \left( \begin{array}{|c|c|} \hline 7 & 9 \\ \hline 3 & 4 & 6 \\ \hline 1 & 2 & 5 & 8 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 9 & \\ \hline 2 & 7 & 8 \\ \hline 1 & 4 & 5 & 6 \\ \hline \end{array} \right).$$

L'algorithme décrit ci-dessus donne

$k$	$P_k$	$s$	$t$	$x_k$									
9	<table><tr><td>7</td><td>9</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td><td>6</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>5</td><td>8</td></tr></table>	7	9	3	4	6	1	2	5	8	3	2	5
7	9												
3	4	6											
1	2	5	8										
8	<table><tr><td>7</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td><td>9</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>6</td><td>8</td></tr></table>	7	3	4	9	1	2	6	8	2	3	8	
7													
3	4	9											
1	2	6	8										
7	<table><tr><td>7</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>6</td><td>9</td></tr></table>	7	3	4	1	2	6	9	2	2	2		
7													
3	4												
1	2	6	9										
6	<table><tr><td>7</td></tr><tr><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>4</td><td>6</td><td>9</td></tr></table>	7	3	1	4	6	9	1	4	9			
7													
3													
1	4	6	9										
5	<table><tr><td>7</td></tr><tr><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>4</td><td>6</td></tr></table>	7	3	1	4	6	1	3	6				
7													
3													
1	4	6											
4	<table><tr><td>7</td></tr><tr><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>4</td></tr></table>	7	3	1	4	1	2	4					
7													
3													
1	4												



$k$	$P_k$	$s$	$t$	$x_k$			
3	<table><tr><td>7</td></tr><tr><td>3</td></tr><tr><td>1</td></tr></table>	7	3	1	3	1	1
7							
3							
1							
2	<table><tr><td>7</td></tr><tr><td>3</td></tr></table>	7	3	2	1	3	
7							
3							
1	<table><tr><td>7</td></tr></table>	7	1	1	7		
7							

Donc  $\sigma = 731469285$ .

### Remarque 2.8

Les insertions peuvent se faire non pas en ligne, mais en colonne et l'on a donc en fait deux correspondances de Robinson-Schensted. De façon analogue, Schensted note  $x \rightarrow P$  le tableau obtenu par insertion (insertion colonne) de l'élément  $x$  dans le tableau  $P$ . On peut remarquer que

$$x \rightarrow P = (P^T \leftarrow x)^T,$$

où  $^T$  indique la transposition.

Remarquons aussi que si  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sont des entiers positifs distincts, alors pour tout  $k \geq 1$ , on a :

$$(x_1 \rightarrow \dots (x_{k-2} \rightarrow (x_{k-1} \rightarrow x_k)) \dots) = (\dots ((x_k \leftarrow x_{k-1}) \leftarrow x_{k-2}) \dots \leftarrow x_1)^T,$$

où il est logique de considérer ici  $x_k$  comme le tableau a une seule entrée égale à  $x_k$ .

En effet, nous allons procéder par induction. Cette propriété est vraie pour  $k = 1$  et elle est aussi vraie pour  $k = 2$  car si  $x_1 < x_2$ , alors

$$x_1 \rightarrow x_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline x_1 & x_2 \\ \hline \end{array} = \left( \begin{array}{|c|} \hline x_2 \\ \hline x_1 \\ \hline \end{array} \right)^T = (x_2 \leftarrow x_1)^T,$$

et si  $x_1 > x_2$ , alors

$$x_1 \rightarrow x_2 = \begin{array}{|c|} \hline x_1 \\ \hline x_2 \\ \hline \end{array} = \left( \begin{array}{|c|c|} \hline x_2 & x_1 \\ \hline \end{array} \right)^T = (x_2 \leftarrow x_1)^T.$$

On a

$$(x_1 \longrightarrow \dots (x_{k-2} \longrightarrow (x_{k-1} \longrightarrow x_k)) \dots) = x_1 \longrightarrow (x_2 \longrightarrow \dots (x_{k-1} \longrightarrow x_k) \dots)$$

et par l'hypothèse d'induction

$$(x_2 \longrightarrow \dots (x_{k-2} \longrightarrow (x_{k-1} \longrightarrow x_k)) \dots) = (\dots ((x_k \longleftarrow x_{k-1}) \longleftarrow x_{k-2}) \dots \longleftarrow x_2)^T.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} (x_1 \longrightarrow \dots (x_{k-1} \longrightarrow x_k) \dots) &= x_1 \longrightarrow (x_2 \longrightarrow \dots (x_{k-1} \longrightarrow x_k) \dots) \\ &= x_1 \longrightarrow (\dots (x_k \longleftarrow x_{k-1}) \dots \longleftarrow x_2)^T \\ &= \left( \left( (\dots (x_k \longleftarrow x_{k-1}) \dots \longleftarrow x_2)^T \right)^T \longleftarrow x_1 \right)^T \\ &= ((\dots (x_k \longleftarrow x_{k-1}) \dots \longleftarrow x_2) \longleftarrow x_1)^T. \end{aligned}$$

### Remarque 2.9

Soit  $\mathbb{N}$  l'ensemble des entiers positifs. La correspondance de Robinson-Schensted peut être donnée non pas pour une permutation, mais pour une bijection entre deux sous-ensembles de  $\mathbb{N}$ . En effet, soit  $\sigma : A \longrightarrow B$ , une bijection d'un sous-ensemble  $A \subseteq \mathbb{N}$  sur un autre sous-ensemble  $B \subseteq \mathbb{N}$  (remarquons que si  $A = B = [n]$ , alors  $\sigma$  est une permutation de  $[n]$ ). On peut construire deux tableaux standards  $P$  et  $Q$  de même forme qui correspondent à la bijection  $\sigma$  où l'ensemble des éléments de  $P$  est  $B$  et l'ensemble des éléments de  $Q$  est  $A$ . Cette correspondance est notée par

$$(\sigma : A \longrightarrow B) \mapsto (P(\sigma, B), Q(\sigma, A)).$$

Par exemple si  $\sigma : \{1, 3, 5, 6, 8\} \longrightarrow \{2, 3, 5, 7, 9\}$  est la bijection donnée par

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 & 8 \\ 7 & 2 & 9 & 5 & 3 \end{pmatrix},$$

on obtient

	$P$	$Q$				
Insérer 7	<table><tr><td>7</td></tr></table>	7	<table><tr><td>1</td></tr></table>	1		
7						
1						
Insérer 2	<table><tr><td>7</td></tr><tr><td>2</td></tr></table>	7	2	<table><tr><td>3</td></tr><tr><td>1</td></tr></table>	3	1
7						
2						
3						
1						

	$P$	$Q$												
Insérer 9	<table><tr><td>7</td><td></td></tr><tr><td>2</td><td>9</td></tr></table>	7		2	9	<table><tr><td>3</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td>5</td></tr></table>	3		1	5				
7														
2	9													
3														
1	5													
Insérer 5	<table><tr><td>7</td><td>9</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td></tr></table>	7	9	2	5	<table><tr><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>1</td><td>5</td></tr></table>	3	6	1	5				
7	9													
2	5													
3	6													
1	5													
Insérer 3	<table><tr><td>7</td><td></td></tr><tr><td>5</td><td>9</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td></tr></table>	7		5	9	2	3	<table><tr><td>8</td><td></td></tr><tr><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>1</td><td>5</td></tr></table>	8		3	6	1	5
7														
5	9													
2	3													
8														
3	6													
1	5													

Alors, les tableaux  $(P, Q)$  qui correspondent à la bijection  $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 & 8 \\ 7 & 2 & 9 & 5 & 3 \end{pmatrix}$  sont

$$P = \begin{array}{|c|c|} \hline 7 & \\ \hline 5 & 9 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array} \text{ et } Q = \begin{array}{|c|c|} \hline 8 & \\ \hline 3 & 6 \\ \hline 1 & 5 \\ \hline \end{array}.$$

### Remarque 2.10

Nous pouvons considérer les tableaux standards comme des éléments particuliers du module  $\mathfrak{J}$  des applications de  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  dans  $\mathbb{Z}$ . Pour tout  $P \in \mathfrak{J}$ , on définira la forme  $|P|$  de  $P$  comme l'ensemble des  $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  tels que  $P_{(i+1)(j+1)} = P(i, j) \neq 0$ ; le contenu  $\{P\}$  de  $P$  sera l'image de  $|P|$  dans  $\mathbb{Z}$ . L'élément  $P$  est standard si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. Si  $(i, j)$  n'appartient pas à  $|P|$ , alors ni  $(i + 1, j)$  ni  $(i, j + 1)$  n'appartiennent à  $|P|$ .
2. La restriction de  $P$  à  $|P|$  est non décroissante en chacun de ses arguments et  $\{P\}$  est un ensemble d'entiers positifs.
3. La restriction de  $P$  à  $|P|$  est une bijection sur  $\{P\}$ .

Par exemple le tableau

$$P = \begin{array}{|c|c|} \hline 7 & \\ \hline 5 & 9 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array}$$

est standard avec  $\{P\} = \{2, 3, 5, 7, 9\}$  et  $|P| = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (0, 2)\}$ .

Pour tout  $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  et tout  $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ,  $(a)_{i,j}$  sera l'élément de  $\mathcal{T}$  défini par les conditions

$|(a)_{i,j}| = (i-1, j-1)$  et  $\{(a)_{i,j}\} = \{a\}$ . Par exemple si  $T = \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 9 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array}$ , alors le tableau  $P$ , donné

ci-dessus, peut s'écrire comme la somme suivante dans  $\mathcal{T}$

$$P = T + (7)_{1,3}.$$

Soit maintenant,  $\sigma : A \rightarrow B$  comme plus haut dans la remarque 2.9. Pour tout sous-ensemble fini  $A'$  de  $A$  et tout entier non négatif  $m$ , on posera  $B' = \{\sigma(a) \mid a \in A'\}$  (remarquons que  $\text{Card} A' = \text{Card} B'$ ) et

$$\begin{cases} B'_0 = \emptyset \\ B'_m = B'_{m-1} \cup \{\sigma(a'_m)\} & \text{si } 0 < m \leq \text{Card } A', \\ B'_m = B'_n & \text{si } m \geq \text{Card } A' = n, \end{cases}$$

où  $a'_m$  dénote le  $m$ -ième élément de  $A'$  par ordre croissant.

Posons

$$\begin{cases} P(\sigma, B'_m) = 0 & \text{si } m = 0, \\ P(\sigma, B'_m) = P(\sigma, B'_{m-1}) \leftarrow \sigma(a'_m) & \text{si } 0 < m \leq \text{Card } B', \\ P(\sigma, B'_m) = P(\sigma, B'_n) & \text{si } m \geq \text{Card } B' = n, \end{cases}$$

où  $0 \in \mathcal{T}$  est le tableau vide. Définissons

$$P(\sigma, B') = P(\sigma, B'_n) \text{ lorsque } \text{Card } B' = n.$$

Il est logique de considérer ici  $0 \leftarrow \sigma(a'_1)$  comme le tableau standard  $(\sigma(a'_1))_{1,1}$  et par conséquent,  $P(\sigma, B')$  est exactement le  $P$ -symbole de la suite

$$\sigma(a'_1), \sigma(a'_2), \dots, \sigma(a'_n).$$

Remarquons que si  $A' = A$  alors  $B' = B$  et  $P(\sigma, B') = P(\sigma, B)$ . On posera

$$\begin{cases} A'_0 = \emptyset \\ A'_m = A'_{m-1} \cup \{a'_m\} & \text{si } 0 < m \leq \text{Card } A', \\ A'_m = A'_n & \text{si } m \geq \text{Card } A' = n, \end{cases}$$

où  $a'_m$  dénote le  $m$ -ième élément de  $A'$  par ordre croissant.

Posons

$$\begin{cases} Q(\sigma, A'_m) = 0 & \text{si } m = 0, \\ Q(\sigma, A'_m) = Q(\sigma, A'_{m-1}) + (a'_m)_{i,j} & \text{si } 0 < m \leq \text{Card } A', \\ Q(\sigma, A'_m) = Q(\sigma, A'_n) & \text{si } m \geq \text{Card } A' = n, \end{cases}$$

où  $\{(i-1, j-1)\} = |P(\sigma, A'_m)| \setminus |P(\sigma, A'_{m-1})|$ . Définissons

$$Q(\sigma, A') = Q(\sigma, A'_n).$$

Quand  $A' = [n]$  ceci est la définition même du  $Q$ -symbole de la suite

$$\sigma(a'_1), \sigma(a'_2), \dots, \sigma(a'_n)$$

et pour  $A'$  quelconque,  $Q(\sigma, A')$  se déduit simplement de ce  $Q$ -symbole en remplaçant dans ce dernier tableau chaque  $m \in [n]$  par  $a'_m$ .

Par exemple, pour la bijection  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 & 8 \\ 7 & 2 & 9 & 5 & 3 \end{pmatrix}$  donnée à la remarque 2.9, on a :

$A = \{1, 3, 5, 6, 8\} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$  où  $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ , i.e.  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 3$ ,  $a_3 = 5$ ,  $a_4 = 6$  et  $a_5 = 8$  et par conséquent,

$$P(\sigma, B_0) = 0,$$

$$\begin{aligned} P(\sigma, B_1) &= P(\sigma, B_0) \leftarrow \sigma(a_1) \\ &= 0 \leftarrow \sigma(1) \\ &= 0 \leftarrow 7 \\ &= \boxed{7}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(\sigma, B_2) &= P(\sigma, B_1) \leftarrow \sigma(a_2) \\
 &= \begin{array}{|c|} \hline 7 \\ \hline \end{array} \leftarrow 2 \\
 &= \begin{array}{|c|} \hline 7 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(\sigma, B_3) &= \begin{array}{|c|} \hline 7 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \leftarrow 9 \\
 &= \begin{array}{|c|c|} \hline 7 & \\ \hline 2 & 9 \\ \hline \end{array}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(\sigma, B_4) &= \begin{array}{|c|c|} \hline 7 & \\ \hline 2 & 9 \\ \hline \end{array} \leftarrow 5 \\
 &= \begin{array}{|c|c|} \hline 7 & 9 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline \end{array}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(\sigma, B_5) &= \begin{array}{|c|c|} \hline 7 & 9 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline \end{array} \leftarrow 3 \\
 &= \begin{array}{|c|c|} \hline 7 & \\ \hline 5 & 9 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array}
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } P(\sigma, B) = \begin{array}{|c|c|} \hline 7 & \\ \hline 5 & 9 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array}.$$

On a aussi

$$Q(\sigma, A_0) = 0,$$

$$Q(\sigma, A_1) = Q(\sigma, A_0) + (a_1)_{i_1, j_1},$$

où  $\{(i_1 - 1, j_1 - 1)\} = |P(\sigma, A_1)| \setminus |P(\sigma, A_0)| = \{(0, 0)\}$ . Ainsi  $(i_1, j_1) = (1, 1)$  et

$$\begin{aligned} Q(\sigma, A_1) &= 0 + (1)_{1,1} \\ &= \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array}, \end{aligned}$$

$$Q(\sigma, A_2) = Q(\sigma, A_1) + (a_2)_{i_2, j_2},$$

où  $\{(i_2 - 1, j_2 - 1)\} = |P(\sigma, A_2)| \setminus |P(\sigma, A_1)| = \{(0, 1)\}$ . Ainsi  $(i_2, j_2) = (1, 2)$  et

$$\begin{aligned} Q(\sigma, A_2) &= \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} + (3)_{1,2} \\ &= \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} Q(\sigma, A_3) &= \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} + (5)_{2,1} \\ &= \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 1 & 5 \\ \hline \end{array}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(\sigma, A_4) &= \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 1 & 5 \\ \hline \end{array} + (6)_{2,2} \\ &= \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 6 \\ \hline 1 & 5 \\ \hline \end{array}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q(\sigma, A_5) &= \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 6 \\ \hline 1 & 5 \\ \hline \end{array} + (8)_{1,3} \\
 &= \begin{array}{|c|} \hline 8 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 6 \\ \hline 1 & 5 \\ \hline \end{array},
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } Q(\sigma, A) = \begin{array}{|c|c|} \hline 8 & \\ \hline 3 & 6 \\ \hline 1 & 5 \\ \hline \end{array}.$$

Pour

$$\begin{aligned}
 A' &= A \setminus \{a_1\} \\
 &= \{1, 3, 5, 6, 8\} \setminus \{1\} \\
 &= \{3, 5, 6, 8\} \\
 &= \{a'_1, a'_2, a'_3, a'_4\}
 \end{aligned}$$

où  $a'_1 < a'_2 < a'_3 < a'_4$ , i.e.  $a'_1 = 3$ ,  $a'_2 = 5$ ,  $a'_3 = 6$  et  $a'_4 = 8$ , on a :

$$B' = \{\sigma(a) | a \in A'\} = \{2, 3, 5, 9\}$$

et

$$P(\sigma, B'_0) = 0,$$

$$\begin{aligned}
 P(\sigma, B'_1) &= P(\sigma, B'_0) \longleftarrow \sigma(a'_1) \\
 &= 0 \longleftarrow \sigma(3) \\
 &= 0 \longleftarrow 2 \\
 &= \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array},
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
P(\sigma, B'_2) &= P(\sigma, B'_1) \leftarrow \sigma(a'_2) \\
&= \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \leftarrow 9 \\
&= \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 9 \\ \hline \end{array},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(\sigma, B'_3) &= \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 9 \\ \hline \end{array} \leftarrow 5 \\
&= \begin{array}{|c|} \hline 9 \\ \hline \end{array} \\
&\quad \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 5 \\ \hline \end{array}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(\sigma, B'_4) &= \begin{array}{|c|} \hline 9 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 5 \\ \hline \end{array} \leftarrow 3 \\
&= \begin{array}{|c|} \hline 9 \\ \hline \end{array} \\
&\quad \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline \end{array} \\
&\quad \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array}
\end{aligned}$$

Donc  $P(\sigma, B') = \begin{array}{|c|} \hline 9 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array}.$

On a aussi

$$Q(\sigma, A'_0) = 0,$$

$$Q(\sigma, A'_1) = Q(\sigma, A'_0) + (a'_1)_{i'_1, j'_1},$$

où  $\{(i'_1 - 1, j'_1 - 1)\} = |P(\sigma, A'_1)| \setminus |P(\sigma, A'_0)| = \{(0, 0)\}$ . Ainsi  $(i'_1, j'_1) = (1, 1)$  et

$$\begin{aligned}
Q(\sigma, A'_1) &= 0 + (3)_{1,1} \\
&= \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array},
\end{aligned}$$

$$Q(\sigma, A'_2) = Q(\sigma, A_1) + (a'_2)_{i'_2, j'_2},$$

où  $\{(i'_2, j'_2)\} = |P(\sigma, A'_2)| \setminus |P(\sigma, A_1)| = \{(1, 0)\}$ . Ainsi  $(i'_2, j'_2) = (2, 1)$  et

$$\begin{aligned} Q(\sigma, A'_2) &= \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} + (5)_{2,1} \\ &= \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 5 \\ \hline \end{array}. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} Q(\sigma, A'_3) &= \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 5 \\ \hline \end{array} + (6)_{2,1} \\ &= \begin{array}{|c|} \hline 6 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 5 \\ \hline \end{array}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(\sigma, A'_4) &= \begin{array}{|c|} \hline 6 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 5 \\ \hline \end{array} + (8)_{3,1} \\ &= \begin{array}{|c|} \hline 8 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 6 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 5 \\ \hline \end{array}, \end{aligned}$$

Donc  $Q(\sigma, A') = \begin{array}{|c|} \hline 8 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 6 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 5 \\ \hline \end{array}.$

### Lemme 2.11

Soit  $P$  un tableau standard et  $x$  un entier positif distinct des éléments de  $P$ . Le tableau  $P \leftarrow x$  est un tableau standard.

### Preuve

Commençons par remarquer que si deux lignes consécutives de  $P$  ont la même longueur et si un nombre  $a$  est déplacé de la première ligne pour être inséré dans la seconde, alors  $a$  est inséré,

dans la seconde ligne, à la place d'un autre nombre  $b$  qui se trouve ou bien directement au-dessus de  $a$

.	.	.	$b$	.	.
.	.	.	$a$	.	.

ou bien à gauche de  $a$

.	$b$	.	•	.	.
.	.	.	$a$	.	.

Donc le nombre  $a$  ne peut pas être ajouté à la fin de la deuxième ligne, ce qui implique qu'une ligne du tableau  $P \leftarrow x$  ne peut pas être plus longue que les lignes situées au-dessous d'elle. Ainsi, pour montrer que  $P \leftarrow x$  est un tableau standard, il suffit seulement de montrer que les valeurs sont strictement croissantes sur chaque ligne en allant de la gauche vers la droite et strictement croissantes sur chaque colonne en allant du bas vers le haut.

Si un nombre est inséré dans une ligne dans une certaine place, alors il est placé dans cette ligne de telle sorte que le nombre situé à sa gauche soit plus petit que lui et le nombre situé à sa droite soit plus grand que lui. Ainsi les nombres dans chaque ligne forment une suite strictement croissante.

Pour montrer que les nombres dans chaque colonne du tableau  $P \leftarrow x$  forment une suite strictement croissante, distinguons les deux cas suivants concernant deux nombres consécutifs dans une colonne du tableau  $P \leftarrow x$  :

- Si aucun d'eux n'a été inséré dans sa position actuelle, alors les positions de ces deux nombres dans le tableau  $P \leftarrow x$  sont les mêmes que dans le tableau  $P$ . Ainsi, ils sont en croissance stricte car  $P$  est standard.

- Si l'un d'eux a été inséré dans sa position actuelle, il suffit de faire les deux remarques suivantes :

- Comme nous l'avons vu ci-dessus, la nouvelle position d'un nombre déplacé d'une ligne vers la ligne suivante est soit directement la position qui est au-dessus de sa position initiale, soit une position à gauche de sa position initiale. Ainsi, il est soit au-dessus du nombre qui l'a déplacé et qui est plus petit que lui, soit au-dessus d'un nombre qui a été à sa gauche (avant qu'il ne se déplace) et qui est aussi plus petit que lui.
- Un nombre  $b$  situé au dessus d'un autre nombre  $a$  qui a été inséré est soit le nombre qui a été déplacé par  $a$  et qui est plus grand que  $a$ , soit un nombre situé à droite du nombre qui a été déplacé par  $a$  et dans ce cas il est aussi plus grand que  $a$ .

Donc, les valeurs sont strictement croissantes sur chaque colonne en allant du bas vers le haut et par conséquent, la preuve de ce lemme est complète.

### Définition 2.12

Le  $P$ -symbole qui correspond à une permutation  $\sigma = x_1 x_2 \dots x_n$  ou plus généralement à une suite d'entiers distincts  $x_1 x_2 \dots x_n$  est le tableau standard

$$(\dots((x_1 \leftarrow x_2) \leftarrow x_3) \dots \leftarrow x_n)$$

où il est logique de considérer ici  $x_1$  comme le tableau à une seule entrée égale à  $x_1$ .

Le  $Q$ -symbole qui correspond à cette suite  $x_1 x_2 \dots x_n$  est le tableau qui a la même forme que le  $P$ -symbole et qui est obtenu en posant  $k$  dans la case qui correspond à la case ajoutée au  $P$ -symbole quand  $x_k$  est inséré dans celui-ci.

On peut remarquer facilement que  $P(\sigma)$  est le  $P$ -symbole qui correspond à la permutation  $\sigma$  et que  $Q(\sigma)$  est le  $Q$ -symbole qui correspond à la permutation  $\sigma$ . Par conséquent, la correspondance de Robinson-Schensted associe à chaque permutation de l'ensemble  $[n]$  son  $P$ -symbole et son  $Q$ -symbole.

### Lemme 2.13

Le  $Q$ -symbole qui correspond à une suite arbitraire est un tableau standard.

### Preuve

Comme le  $Q$ -symbole a la même forme que le  $P$ -symbole et puisque le  $P$ -symbole est un tableau standard, alors pour montrer que le  $Q$ -symbole est standard, il suffit de montrer que les valeurs sont strictement croissantes sur chaque ligne en allant de la gauche vers la droite et strictement croissantes sur chaque colonne en allant du bas vers le haut. Comme chaque nombre ajouté au  $Q$ -symbole est plus grand que tous les nombres dans le  $Q$ -symbole et en particulier, il est plus grand que les nombres situés au-dessous de lui et à sa gauche. Ainsi, les nombres dans chaque ligne et chaque colonne du  $Q$ -symbole forment des suites strictement croissantes et donc le lemme est établi.

### Théorème 2.14

Il existe une correspondance bijective entre les suites formées des entiers distincts  $x_1, x_2, \dots, x_n$  et les paires  $(P, Q)$  de tableaux standards de même forme, le tableau  $P$  contient  $x_1, x_2, \dots, x_n$

et le second tableau  $Q$  contient  $1, 2, \dots, n$ . En particulier, l'application (la correspondance de Robinson-Schensted)

$$\sigma \mapsto (P(\sigma), Q(\sigma)),$$

est une bijection entre les permutations de  $S_n$  et les paires de tableaux de Young standards de même forme.

### Preuve

D'après ce qui précède, si  $x_1, x_2, \dots, x_n$  est une suite arbitraire d'entiers distincts, alors on peut lui associer son  $P$ -symbole et son  $Q$ -symbole qui sont des tableaux standards de même forme, le tableau  $P$  contient  $x_1, x_2, \dots, x_n$  et le second tableau  $Q$  contient  $1, 2, \dots, n$ .

Inversement, soit  $(P, Q)$  une paire de tableaux standards de même forme de sorte que  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sont les entrées du tableau  $P$  et  $1, 2, \dots, n$  sont les entrées du second tableau  $Q$ . On peut trouver une suite unique qui admet ces deux tableaux comme un  $P$ -symbole et comme un  $Q$ -symbole comme suit :

La position du plus grand nombre dans  $Q$ , i.e. la position de  $n$  dans  $Q$ , nous indique le nombre  $y_m$  dans  $P$  qui se trouve dans la case correspondante car  $P$  et  $Q$  ont la même forme. Ce nombre a été déplacé de la ligne précédente par  $y_{m-1}$  le plus grand élément dans cette ligne qui est plus petit que lui (il existe toujours au moins un nombre plus petit que  $y_m$  dans la ligne précédente car le nombre qui est directement au dessous de  $y_m$  est plus petit que  $y_m$ ). L'élément  $y_{m-1}$  a aussi été déplacé de la ligne précédente à celle où il se trouve par un autre élément  $y_{m-2}$ . On continue de cette manière, on obtient le nombre  $x_n$  qui a été inséré dans la première ligne et qui est le dernier élément de notre suite. Maintenant, les tableaux obtenus de  $P$  et de  $Q$  en supprimant respectivement les éléments  $x_n$  (de  $P$ ) et  $n$  (de  $Q$ ), sont le  $P$ -symbole et le  $Q$ -symbole de notre suite avant que l'élément  $x_n$  ne soit inséré. En répétant à chaque fois cette procédure, on peut trouver les éléments  $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1$  de notre suite. Ceci termine la preuve de ce théorème.

La correspondance de Robinson-Schensted a plusieurs propriétés et dans la suite de ce chapitre, nous nous proposons d'en donner quelques-unes.

Remarquons que si un élément est éjecté de la première ligne à la deuxième ligne dans un tableau, ceci ne change pas la longueur de la première ligne; de plus, les lignes 2,3,... sont construites en utilisant les éléments éjectés exactement de la même manière dont les lignes 1,2,3,... sont construites à partir de la permutation considérée. Ceci nous amène à regarder le théorème

précédent d'une autre façon en se concentrant seulement sur les premières lignes de  $P$  et  $Q$ .  
Examinons l'exemple suivant :

### Exemple 2.15

Soit  $\sigma = 35186724$  une permutation de  $[8]$ . soit  $(P, Q)$  la paire de tableaux standards associée à  $\sigma$  par la correspondance de Robinson-Schensted.

Nous allons décrire les changements apportés à  $P$  et  $Q$  dans la première ligne à chaque étape

Entrée de $Q$	les changements apportés à $P$ et $Q$ dans la 1 <sup>ère</sup> ligne	1 <sup>ère</sup> ligne de $P$	1 <sup>ère</sup> ligne de $Q$
1	Insérer 3 ; Poser $Q_{11} = 1$	3	1
2	Insérer 5 ; Poser $Q_{12} = 2$	3 5	1 2
3	Insérer 1 ; Éjecter 3	1 5	1 2
4	Insérer 8 ; Poser $Q_{13} = 4$	1 5 8	1 2 4
5	Insérer 6 ; Éjecter 8	1 5 6	1 2 4
6	Insérer 7 ; Poser $Q_{14} = 6$	1 5 6 7	1 2 4 6
7	Insérer 2 ; Éjecter 5	1 2 6 7	1 2 4 6
8	Insérer 4 ; Éjecter 6	1 2 4 7	1 2 4 6

Les lignes qui restent de  $P$  et  $Q$  peuvent être trouvées en appliquant la correspondance de Robinson-Schensted à  $\sigma = 3856$  (les nombres éjectés), en utilisant 3578 comme des entrées pour  $Q$ .

On appelle "la permutation"

$$\sigma b = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

la permutation éjectée de  $\sigma$ .

Pour trouver les deuxième lignes de  $P$  et  $Q$  on applique l'algorithme d'insertion à  $\sigma b$ .

Entrée de $Q$	les changements apportés à $P$ et $Q$ dans la 2 <sup>ème</sup> ligne	2 <sup>ème</sup> ligne de $P$	2 <sup>ème</sup> ligne de $Q$
3	Insérer 3 ; Poser $Q_{21} = 3$	3	3
5	Insérer 8 ; Poser $Q_{22} = 5$	3 8	3 5
7	Insérer 5 ; Éjecter 8	3 5	3 5
8	Insérer 6 ; Poser $Q_{23} = 8$	3 5 6	1 5 8

Il est clair que la troisième ligne de  $P$  a 8 et celle de  $Q$  a 7.

Maintenant, dans le but d'étudier le comportement de cette construction dans la première ligne, on peut considérer les éléments qui vont dans une certaine colonne de cette ligne. Plus précisément, nous divisons les  $n$  éléments de l'ensemble  $\{(i, \sigma(i)) \mid 1 \leq i \leq n\}$  en classes.

### Définition 2.16

*On dit que  $(i, \sigma(i))$  est dans la classe  $t$  si  $\sigma(i)$  est inséré dans la colonne  $t$  de la première ligne.*

Dans l'exemple précédent,

$$class1 = \{(1, 3), (3, 1)\},$$

$$class2 = \{(2, 5), (7, 2)\},$$

$$class3 = \{(4, 8), (5, 6), (8, 4)\},$$

$$class4 = \{(6, 7)\},$$

On peut remarquer que si  $(i, \sigma(i))$  est dans la classe  $t$ , la première ligne de  $P$  possède  $(t - 1)$  entrées plus petite que  $\sigma(i)$  une fois que  $\sigma(i)$  est inséré dans  $P$ . Ainsi  $\sigma$  possède une sous-suite strictement croissante de longueur  $t$  qui se termine en  $\sigma(i)$ . Une sous-suite similaire, i.e. strictement croissante et se terminant à  $\sigma(i)$ , plus longue force  $\sigma(i)$  à être inséré à droite de la colonne  $t$ . Cette propriété caractérise la classe d'une paire.

### Lemme 2.17

*La paire  $(i, \sigma(i))$  appartient à la classe  $t$  si et seulement si la longueur de la plus longue sous-suite de  $\sigma$  strictement croissante se terminant à  $\sigma(i)$  est  $t$ .*

### Preuve

Il reste à montrer que si la longueur de la plus longue sous-suite de  $\sigma$  strictement croissante se terminant à  $\sigma(i)$  est  $t$ , alors  $(i, \sigma(i))$  appartient à la classe  $t$ . Par induction sur  $t$ . Si  $t = 1$ , alors la longueur de la plus longue sous-suite de  $\sigma$  strictement croissante se terminant à  $\sigma(i)$  est 1. Ainsi,  $\sigma(i)$  est plus petit que tous les  $\sigma(j)$  qui le précède, ce qui implique que  $\sigma(i)$  est inséré dans la première colonne et donc  $(i, \sigma(i))$  appartient à la classe 1.

Maintenant, supposons  $t > 1$  et choisissons une sous-suite strictement croissante  $S$  de  $\sigma$  se terminant à  $\sigma(i)$  de longueur maximale  $t$ . Soit  $\sigma(j)$  le terme de  $S$  qui précède  $\sigma(i)$ . Alors la sous-suite  $S' = S - \{\sigma(i)\}$  qui se termine à  $\sigma(j)$  est aussi de longueur maximale. Par induction,  $(j, \sigma(j))$  appartient à la classe  $(t - 1)$ . Ainsi une fois que  $\sigma(j)$  est inséré dans la première ligne,

l'entrée  $v$  dans la colonne  $(t - 1)$  vérifie  $v \leq \sigma(j) < \sigma(i)$ . Ainsi,  $\sigma(i)$  est inséré soit dans la colonne  $t$ , soit à droite de la colonne  $t$ . Soit  $w$  l'élément dans la colonne  $t$  une fois que  $\sigma(i)$  est inséré. L'élément  $w$  (qui précède  $\sigma(i)$ ) est un membre d'une paire dans la classe  $t$ . Par la première partie de ce théorème, il existe une sous-suite strictement croissante de  $\sigma$  de longueur  $t$  se terminant à  $w$ . Si  $w < \sigma(i)$ , on peut ajouter  $\sigma(i)$  à cette sous-suite et obtenir une sous suite strictement croissante de longueur  $(t + 1)$ . Ceci contredit l'hypothèse, alors  $w > \sigma(i)$  et donc  $\sigma(i)$  est inséré dans la colonne  $t$ .

### **Théorème 2.18**

*Le nombre de colonnes de  $P$  (ou  $Q$ ) est la longueur de la plus longue sous-suite strictement croissante de  $\sigma$ .*

#### **Preuve**

Supposons  $S$  une des plus longues sous-suites strictement croissantes de  $\sigma$  de longueur  $t$  et supposons que le nombre de colonnes de  $P$  est  $r$ . Il s'agit de montrer que  $t = r$ . En effet, par le lemme 2.17, le dernier terme  $\sigma(i)$  de  $S$  est inséré dans la colonne  $t$  de  $P$ , ainsi  $t \leq r$ . Inversement, comme  $r$  est la longueur de la première ligne de  $P$ , alors l'entrée  $P_{1r}$  de  $P$  ( $P_{1r}$  est le dernier élément de la première ligne de  $P$ ) est inséré dans la colonne  $r$  de la première ligne, i.e. l'entrée  $P_{1r}$  est un membre d'une paire dans la classe  $r$  et par le lemme 2.17, la longueur de la plus longue sous-suite strictement croissante de  $\sigma$  se terminant à  $P_{1r}$  est  $r$ . Mais, la plus longue sous-suite strictement croissante de  $\sigma$  est de longueur  $t$ , ainsi  $r \leq t$ .

### **Théorème 2.19**

*Supposons que  $\sigma$  correspond à la paire  $(P, Q)$  par la correspondance de Robinson-Schensted. Alors  $\sigma^{-1}$  (l'inverse de  $\sigma$ ) correspond à la paire  $(Q, P)$ .*

La preuve de ce théorème est par induction sur le nombre de lignes de  $P$ . Pour faire cette preuve, on aura besoin de la remarque et du lemme suivants :

#### **Remarque 2.20**

Si

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

est une permutation de  $[n]$ , alors  $\sigma^{-1}$  (l'inverse de  $\sigma$ ) est une permutation de  $[n]$  qu'on obtient



en interchangeant les deux lignes précédentes et en triant les colonnes obtenues de sorte que la nouvelle ligne supérieure soit en ordre strictement croissant ; par exemple, si

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 1 & 8 & 6 & 7 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

alors en échangeant les deux lignes de  $\sigma$ , on obtient

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 8 & 6 & 7 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

et en triant les colonnes obtenues de sorte que la nouvelle ligne supérieure soit en ordre strictement croissant, on obtient

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 1 & 8 & 2 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

### Lemme 2.21

*Si la paire  $(i, \sigma(i))$  appartient à la classe  $t$  de  $\sigma$ , alors la paire  $(\sigma(i), i)$  appartient à la classe  $t$  de  $\sigma^{-1}$ .*

### Preuve

En utilisant le lemme 2.17, il suffit de montrer que la plus longue sous-suite strictement croissante de  $\sigma^{-1}$  se terminant à  $i$  est de longueur  $t$ . Toujours, par le lemme 2.17, comme  $(i, \sigma(i))$  appartient à la classe  $t$  de  $\sigma$ , alors la plus longue sous-suite strictement croissante de  $\sigma$  se terminant à  $\sigma(i)$  est de longueur  $t$ , supposons que cette sous-suite est  $\sigma(i_1) < \sigma(i_2) < \dots < \sigma(i_t)$  où  $i_1 < i_2 < \dots < i_t$  et  $\sigma(i_t) = \sigma(i)$ , i.e.  $i_t = i$ . Par la construction précédente de  $\sigma^{-1}$ , donnée à la remarque 2.20, on peut remarquer facilement que  $i_1 < i_2 < \dots < i_t$  est une sous-suite strictement croissante de  $\sigma^{-1}$  se terminant à  $i$  et elle est de longueur  $t$ . Donc la plus longue sous-suite strictement croissante de  $\sigma^{-1}$  se terminant à  $i$  est de longueur  $\geq t$ . Pour terminer cette preuve, il faut montrer qu'elle ne peut pas être de longueur  $> t$ . En effet, supposons le contraire, i.e. il existe une sous-suite strictement croissante de  $\sigma^{-1}$  se terminant à  $i$  de longueur  $m$  où  $m > t$ . Supposons que cette sous-suite soit  $\sigma^{-1}(j_1) < \sigma^{-1}(j_2) < \dots < \sigma^{-1}(j_m)$  où  $j_1 < j_2 < \dots < j_m$  et  $m > t$  et  $\sigma^{-1}(j_m) = i$ . En construisant  $\sigma$ , à partir de  $\sigma^{-1}$ , comme dans la remarque 2.20, on obtient que la suite  $j_1 < j_2 < \dots < j_m$  est une sous-suite strictement croissante de  $\sigma$  se terminant à  $j_m$  de longueur  $m > t$ . Mais  $j_m = \sigma(i)$ , ainsi cette sous-suite de  $\sigma$  se termine à  $\sigma(i)$ , ce qui donne une contradiction car  $(i, \sigma(i))$  est dans la classe  $t$  de  $\sigma$ .

**Preuve** (du théorème 2.19)

Notons que si  $(i, \sigma(i))$  et  $(j, \sigma(j))$  sont dans la même classe  $t$  de  $\sigma$  avec  $i < j$ , alors  $\sigma(i) > \sigma(j)$  car les entrées dans la colonne  $t$  dans la première ligne sont en ordre décroissant comme des lettres de la permutation  $\sigma$  (en considérant  $\sigma$  comme un mot en les lettres  $1, 2, \dots, n$ ), une fois insérées dans  $P$ . Ceci implique aussi que le plus petit  $\sigma(i)$  dans la classe  $t$  est l'entrée  $P_{1t}$ . le plus grand  $\sigma(i)$  dans la classe  $t$  se présente quand la cellule  $t$  dans la première ligne est occupée pour la première fois, ainsi  $Q_{1t} = i$  (dans l'exemple précédent, le plus petit  $\sigma(i)$  dans la classe 3 est  $\sigma(8) = 4$  et  $P_{13} = 4$ , le plus grand  $\sigma(i)$  est  $\sigma(4) = 8$  et  $Q_{13} = 4$ ). Ainsi, la sous-suite  $S$  de  $\sigma$  formé des éléments  $\sigma(i)$  dans la classe  $t$  est strictement décroissante et son dernier terme est  $P_{1t}$ . L'indexe  $i$  du premier terme  $\sigma(i)$  dans  $S$  est l'entrée  $Q_{1t}$ . Le diagramme ci-dessous montre  $S$ , les entrées  $P_{1t}$  et  $Q_{1t}$  et la suite inverse de  $S$  (on considère les termes de  $S$  du dernier jusqu'au premier). Cette sous-suite de  $\sigma^{-1}$  donne les entrées  $P'_{1t}$  et  $Q'_{1t}$  si  $\sigma^{-1}$  correspond à la paire  $(P', Q')$  par la correspondance de Robinson-Schensted.

Les paires dans la classe  $t$  de  $\sigma$  :

$$Q_{1t} = i_1 \quad \left( \begin{array}{ccccccc} i_1 & < & i_2 & < & \cdots & < & i_k \\ \sigma(i_1) & > & \sigma(i_2) & > & \cdots & > & \sigma(i_k) \end{array} \right) \quad P_{1t} = \sigma(i_k)$$

Les paires dans la classe  $t$  de  $\sigma^{-1}$  :

$$Q'_{1t} = \sigma(i_k) \quad \left( \begin{array}{ccccccc} \sigma(i_k) & < & \sigma(i_{k-1}) & < & \cdots & < & \sigma(i_1) \\ i_k & > & i_{k-1} & > & \cdots & > & i_1 \end{array} \right) \quad P'_{1t} = i_1$$

Ce diagramme montre que  $Q'_{1t} = P_{1t}$  et  $P'_{1t} = Q_{1t}$ , ainsi les premières lignes de  $Q'$  et  $P$  et de  $P'$  et  $Q$  sont identiques. Ensuite, supposons que la permutation éjectée de  $\sigma$  est  $\sigma b$ . Les entrées de la première ligne de  $\sigma b$  sont utilisées pour les lignes restantes de  $Q$ . Ainsi, elles sont aussi utilisées pour les lignes restantes de  $P'$ . Le même raisonnement peut se faire concernant la seconde ligne de  $\sigma b$  et les colonnes restantes de  $P$  et  $Q'$ . Ainsi, si nous montrons que  $\sigma b$  est l'inverse de  $\sigma^{-1}b$ , l'hypothèse d'induction montre que le tableau  $P$  de  $\sigma b$  est identique au tableau  $Q$  de  $\sigma^{-1}b$  et vice versa. Ceci complète la preuve.

Supposons que dans la classe  $t$  de  $\sigma$ ,  $\sigma(i_2)$  éjecte  $\sigma(i_1)$ ,  $\sigma(i_3)$  éjecte  $\sigma(i_2)$ , etc. Ainsi  $\sigma b$  contient les paires

$$\begin{pmatrix} i_2 & < & \cdots & < & i_k \\ \sigma(i_1) & > & \cdots & > & \sigma(i_{k-1}) \end{pmatrix},$$

alors que  $\sigma^{-1}b$  contient les paires de la classe  $t$

$$\begin{pmatrix} \sigma(i_{k-1}) & < & \cdots & < & \sigma(i_1) \\ i_k & > & \cdots & > & i_2 \end{pmatrix}.$$

Par exemple, les paires de la classe 3 de  $\sigma = 35186724$  donnent

$$\begin{pmatrix} \boxed{4} & 5 & 8 \\ 8 & 6 & \boxed{4} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 6 \end{pmatrix},$$

alors que la classe 3 de  $\sigma^{-1}$  donne

$$\begin{pmatrix} \boxed{4} & 6 & 8 \\ 8 & 5 & \boxed{4} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ceci montre que l'inverse de  $\sigma b$  est  $\sigma^{-1}b$  et donc la preuve du théorème est complète.

### Corollaire 2.22

*Le nombre de tableaux de Young standards dont les entrées sont exactement les entiers  $1, 2, \dots, n$ , i.e. le nombre d'éléments de  $\mathfrak{D}_n$  est égal au nombre d'involutions de l'ensemble  $\{1, 2, \dots, n\}$ .*

### Preuve

Si  $\pi$  est une involution de l'ensemble  $\{1, 2, \dots, n\}$ , alors  $\pi = \pi^{-1}$ . Supposons que la correspondance de Robinson-Schensted associe à  $\pi$  la paire de tableaux  $(P, Q)$ , ainsi, par le théorème 2.19, elle associe à  $\pi^{-1}$  la paire  $(Q, P)$ . Comme  $\pi = \pi^{-1}$ , alors  $(P, Q) = (Q, P)$ , ce qui implique  $P = Q$ . Inversement, si  $\pi$  est une permutation qui correspond à  $(P, P)$ , alors, par le théorème 2.19,  $\pi^{-1}$  aussi correspond à  $(P, P)$ . Ainsi  $\pi = \pi^{-1}$ , i.e.  $\pi$  est une involution de l'ensemble  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Donc, il existe une bijection entre les involutions de l'ensemble  $\{1, 2, \dots, n\}$  et les tableaux  $P$  de  $\mathfrak{D}_n$ .

Par exemple, il y a dix involutions de l'ensemble  $\{1, 2, 3, 4\}$ ,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

et il y a exactement dix tableaux de Young standards à 4 éléments

1	2	3	4
---	---	---	---

2		
1	3	4

3	
2	
1	4

4	
2	
1	3

3		
1	2	4

4	
3	
1	2

4		
1	2	3

2	4
1	3

3	4
1	2

4
3
2
1

qui correspondent respectivement à ces dix involutions.

## 2.4 Algorithme de suppression du plus petit élément

Il est clair que l'élément situé dans le côté inférieur gauche d'un tableau standard est le plus petit parmi les éléments de ce tableau. L'algorithme de suppression du plus petit élément, consiste à supprimer cet élément et à réarranger les éléments restants de sorte qu'ils forment un autre tableau standard.

Regardons ce qui se passe si nous supprimons le plus petit élément du tableau

16					
10	12				
4	9	13			
2	6	8	14		
1	3	5	7	11	15

Si le 1 est supprimé, le 2 vient prendre sa place. Ainsi le 4 se déplace pour prendre la place où était le 2 mais le 10 ne peut pas prendre la position de 4 ; le 9 peut être déplacé vers la place de 4 et le 12 vers la place de 9. En général, ceci nous amène à la procédure suivante :

**Définition 2.23 : Algorithme de suppression du plus petit élément**

*Soit  $P$  un tableau standard à  $n$  éléments. L'algorithme de suppression du plus petit élément dans  $P$  définit un nouveau tableau qu'on note  $\Delta P$  à  $(n - 1)$  éléments de la manière suivante :*

*On supprime le plus petit élément situé dans le côté inférieur gauche de  $P$  et on déplace les autres éléments de sorte que les propriétés des tableaux soient préservées. Plus précisément, cet algorithme consiste à remplacer la plus petite cellule (celle contenant le plus petit élément qu'on notera  $x$ ), par une cellule vide et d'échanger récursivement cette cellule vide avec la plus petite des deux cellules situées à sa droite et au dessus, le processus se terminant lorsque la cellule vide arrive sur la frontière du tableau*

**Exemple 2.24**

Si  $T$  est le tableau

11			
4	8		
2	5	7	9

alors

$\Delta T =$	11			
	8			
	4	5	7	9

Maintenant, on peut décrire la suppression du plus petit élément  $x$  dans le tableau  $P$  par les étapes suivantes :

**Étape 1 : Débuter**

Posons  $r = 1, s = 1$ .

**Étape 2 : Réaliser**

Si  $P_{rs} = +\infty$ , le processus est terminé.

**Étape 3 : Comparer**

Si  $P_{(r+1)s} \lesssim P_{r(s+1)}$ , aller à l'étape 5 (nous examinons les éléments situés au dessus et à droite de la cellule vide et nous déplaçons le plus petit parmi les deux).

**Étape 4 : Position gauche**

Remplacer  $P_{rs}$  par  $P_{r(s+1)}$  et  $s$  par  $s + 1$  et revenons à l'étape 3.

**Étape 5 : Position supérieure**

Remplacer  $P_{rs}$  par  $P_{(r+1)s}$  et  $r$  par  $r + 1$  et revenons à l'étape 2.

Pour le tableau  $T$  donné à l'exemple 2.24, on a supprimé le plus petit élément 2 et on a réarrangé les autres éléments de sorte qu'ils forment un autre tableau  $\Delta T$ . En effet, posons  $r = 1$  et  $s = 1$ . Comme  $T_{21} = 4 \lesssim T_{12} = 5$ , alors d'après l'étape 5 précédente, on remplace  $T_{11}$  par  $T_{21}$ , i.e. on remplace 2 par 4 et on remplace  $r$  par  $(r + 1)$ , i.e. 1 par 2. Maintenant, on a  $r = 2$  et  $s = 1$ . Comme  $T_{21} = 4 \neq \infty$  et  $T_{31} = 11 \not\lesssim T_{22} = 8$ , alors d'après l'étape 4 précédente, on remplace  $T_{21}$  par  $T_{22}$ , i.e. on remplace 4 par 8 et on remplace  $s$  par  $(s + 1)$ , i.e. 1 par 2. Maintenant, on a  $r = 2$  et  $s = 2$ . Comme  $T_{22} = 8 \neq +\infty$  et  $T_{32} = +\infty \lesssim T_{23} = +\infty$ , alors d'après l'étape 5 précédente, on remplace  $T_{22}$  par  $T_{32}$ , i.e. on remplace 8 par  $+\infty$  et on remplace  $r$  par  $(r + 1)$ , i.e. 2 par 3. Maintenant, on a  $r = 3$  et  $s = 2$ . Comme  $T_{32} = +\infty$ , alors le processus est terminé. Donc 2 a été supprimé du tableau  $T$ ; l'élément 4 prend sa place. L'élément 8 se déplace à la place de 4 et on obtient le tableau  $\Delta T$ .

Il est facile de montrer que le tableau  $\Delta P$  est standard. De plus, le théorème suivant donne une propriété très intéressante de l'algorithme de suppression du plus petit élément d'un tableau.

**Théorème 2.25** (M. P. Schützenberger)

Si le tableau  $P$  est le  $P$ -symbole de la suite  $x_1, x_2, \dots, x_n$  et si  $x_i = \min \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , alors  $\Delta P$  est le  $P$ -symbole de la suite  $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ .

La preuve de ce théorème sera donnée à la fin de ce chapitre à la remarque 2.41.

Schensted a montré (Schensted, 1961) que si  $\sigma$  est une permutation de  $[n]$ , alors

$$P(\sigma^*) = P(\sigma)^T,$$

où  $T$  désigne la transposition et  $\sigma^*$  l'image miroir de  $\sigma$ .

Rappelons que si  $\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\dots\sigma(n)$  est une permutation de  $S_n$ , alors  $\sigma^*$ , l'image miroir de  $\sigma$ , est la permutation  $\sigma^* = \sigma(n)\sigma(n-1)\dots\sigma(1)$ . On peut aussi définir  $\sigma^*$  de manière plus formelle en posant  $\sigma^*(i) = \sigma(n-i+1)$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ .

Pour donner la preuve de ce principal résultat, on a besoin du lemme suivant :

**Lemme 2.26**

$$(x \rightarrow P) \leftarrow y = x \rightarrow (P \leftarrow y)$$

**Preuve** (voir (Schensted, 1961, p. 183))

**Lemme 2.27**

Les  $P$ -symboles des deux suites  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$  et  $x_n, x_{n-1}, \dots, x_2, x_1$ , s'obtiennent l'un de l'autre en échangeant les lignes et les colonnes, i.e. par transposition. En particulier, si  $\sigma$  est une permutation de  $[n]$ , alors

$$P(\sigma^*) = P(\sigma)^T,$$

où  $T$  désigne la transposition et  $\sigma^*$  l'image miroir de  $\sigma$ .

**Preuve**

Commençons par remarquer que

$$x \rightarrow y = x \leftarrow y,$$

puisque si  $x < y$ , on obtient toujours 

$x$	$y$
-----	-----

 et si  $x > y$ , on obtient toujours 

$x$
$y$

. Maintenant, nous définissons

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\dots((x_1 \leftarrow x_2) \leftarrow x_3) \dots \leftarrow x_n)$$

et

$$\tilde{P}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 \rightarrow \dots (x_{n-2} \rightarrow (x_{n-1} \rightarrow x_n)) \dots).$$

Ensuite, nous supposons que  $P(x_1, x_2, \dots, x_n) = \tilde{P}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  et nous montrons que

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) = \tilde{P}(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$$

(ci-haut, on a montré que  $P(x_1, x_2) = x_1 \leftarrow x_2 = x_1 \rightarrow x_2 = \tilde{P}(x_1, x_2)$ . De plus  $P(x_1) = x_1 = \tilde{P}(x_1)$ ). On a

$$\begin{aligned}
 P(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) &= P(x_1, x_2, \dots, x_n) \leftarrow x_{n+1} \\
 &= \tilde{P}(x_1, x_2, \dots, x_n) \leftarrow x_{n+1} \\
 &= [x_1 \rightarrow \tilde{P}(x_2, \dots, x_n)] \leftarrow x_{n+1} \\
 &= x_1 \rightarrow [\tilde{P}(x_2, \dots, x_n) \leftarrow x_{n+1}] \\
 &= x_1 \rightarrow [P(x_2, \dots, x_n) \leftarrow x_{n+1}] \\
 &= x_1 \rightarrow P(x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \\
 &= x_1 \rightarrow \tilde{P}(x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \\
 &= \tilde{P}(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}).
 \end{aligned}$$

Ci-dessus, on a utilisé l'hypothèse de récurrence ainsi que le lemme 2.26.

Maintenant,  $P(x_1, \dots, x_n)$  est le  $P$ -symbole de la suite  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , alors que  $\tilde{P}(x_1, \dots, x_n)$  est le  $P$ -symbole de la suite  $x_n, \dots, x_2, x_1$  avec les lignes et les colonnes échangées comme nous l'avons déjà vu à la remarque 2.8. Par conséquent, le lemme est démontré.

### Remarque 2.28

On n'a pas supposé que le lemme 2.27 est vrai pour les  $Q$ -symboles.

On a montré au théorème 2.18 ci-dessus que le nombre de colonnes du  $P$ -symbole (ou du  $Q$ -symbole) est égal à la longueur de la plus longue sous-suite strictement croissante de la suite correspondante. En utilisant la notion de sous-suite fondamentale, on peut montrer cette propriété.

### Définition 2.29

La  $j^{\text{me}}$  sous-suite fondamentale d'une suite donnée est la sous-suite constituée de tous les nombres qui ont été insérés dans la  $j^{\text{me}}$  place de la première ligne du  $P$ -symbole.

### Lemme 2.30

Chaque sous-suite fondamentale est une sous-suite décroissante.

### Preuve

Chaque nombre dans la  $j^{\text{me}}$  sous-suite fondamentale, une fois inséré dans la première ligne



déplace le nombre précédent dans cette sous-suite qui doit être en conséquence plus grand que lui.

### Lemme 2.31

*Pour chaque terme de la  $j^{\text{me}}$  sous-suite fondamentale, il existe un terme de la  $(j-1)^{\text{me}}$  sous-suite fondamentale qui est plus petit que lui et qui a un classement aussi plus petit, i.e. ce terme de la  $(j-1)^{\text{me}}$  sous-suite fondamentale, une fois que les deux suites ont le même ensemble d'indices, a un indice plus petit que celui du terme de la  $j^{\text{me}}$  sous-suite fondamentale.*

### Preuve

Le nombre qui se trouve dans la  $(j-1)^{\text{me}}$  place dans la première ligne, une fois que le terme donné de la  $j^{\text{me}}$  sous-suite fondamentale est inséré, est un terme de la  $(j-1)^{\text{me}}$  sous-suite fondamentale qui fait l'affaire.

### Remarque 2.32

On peut déduire le résultat donné au théorème 2.18 ci-dessus en utilisant la notion de sous-suite fondamentale. En effet, le nombre de colonnes du  $P$ -symbole (ou du  $Q$ -symbole) d'une suite  $x_1, x_2, \dots, x_n$  est le même que le nombre des sous-suites fondamentales de cette suite. Par le lemme 2.30, il existe au plus un terme de chaque sous-suite fondamentale dans une sous-suite strictement croissante de la suite  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Par le lemme 2.31, on peut construire une sous-suite strictement croissante de la suite  $x_1, x_2, \dots, x_n$  avec un élément de chaque sous-suite fondamentale. Donc cette remarque nous montre comment obtenir une sous-suite strictement croissante de la suite  $x_1, x_2, \dots, x_n$  de longueur maximale.

### Théorème 2.33

*Le nombre de lignes du  $P$ -symbole (ou du  $Q$ -symbole) d'une suite  $x_1, x_2, \dots, x_n$  est égal à la longueur de la plus longue sous-suite strictement décroissante de cette suite.*

### Preuve

Ceci découle directement du théorème 2.18 et du lemme 2.27 car si la suite  $x_1, \dots, x_n$  est strictement croissante, alors la suite  $x_n, \dots, x_1$  est strictement décroissante et si la suite  $x_1, \dots, x_n$  est strictement décroissante, alors la suite  $x_n, \dots, x_1$  est strictement croissante.

### Remarque 2.34

Soit  $P$  le  $P$ -symbole de la suite  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Supposons que le tableau de Young standard

$P$  correspond au partage  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$  de  $n$ . Greene (Greene, 1974) a montré un résultat qui est une extension des résultats de Schensted donnés au théorèmes 2.18 et 2.33. Plus précisément, pour tout  $m \leq n$ , soit  $d_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$  la longueur de la plus longue sous-suite de la suite  $x_1, x_2, \dots, x_n$  qui ne possède aucune sous-suite croissante de longueur  $m + 1$  et soit  $a_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$  la longueur de la plus longue sous-suite de la suite  $x_1, x_2, \dots, x_n$  qui ne possède aucune sous-suite décroissante de longueur  $m + 1$ . Greene a montré que

$$a_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m$$

et que

$$d_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda_1^t + \lambda_2^t + \dots + \lambda_m^t$$

où  $\lambda^t = (\lambda_1^t, \dots, \lambda_k^t)$  est le partage conjugué de  $\lambda$ . Ainsi, les résultats de Schensted sont le cas particulier  $m = 1$ . En effet,

$$a_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda_1$$

est le nombre de colonnes de  $P$  et il est la longueur de la plus longue sous-suite de la suite  $x_1, x_2, \dots, x_n$  qui ne possède aucune sous-suite décroissante de longueur 2, i.e. la longueur de la plus longue sous-suite de la suite  $x_1, x_2, \dots, x_n$  qui est strictement croissante et ceci donne le résultat du théorème 2.18. De même,

$$d_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda_1^t$$

est le nombre de lignes de  $P$  et il est la longueur de la plus longue sous-suite de la suite  $x_1, x_2, \dots, x_n$  qui ne possède aucune sous-suite croissante de longueur 2, i.e. la longueur de la plus longue sous-suite de la suite  $x_1, x_2, \dots, x_n$  qui est strictement décroissante et ceci donne le résultat du théorème 2.33.

## 2.5 Algorithme de “ vidage-remplissage ”

L'algorithme de “ vidage-remplissage ”, introduit par Schützenberger, est défini comme suit :

### Définition 2.35

Soit  $P$  un tableau standard à  $n$  éléments. L'algorithme de <sup>1</sup>vidage-remplissage] définit un nouveau tableau qu'on note  $P_{V,R}$  à  $n$  éléments de la manière suivante :



7				
6	8			
	8	9		
6	7	9		

7				
6	8			
8		9		
6	7	9		

7				
6	8			
8	5	9		
6	7	9		

7				
6	8			
8	5	9		
	7	9		

7				
6	8			
8	5	9		
7		9		

7				
6	8			
8	5	9		
7	9			
7				
6	8			
8	5	9		
7	9	4		
7				
6	8			
8	5	9		
	9	4		
7				
6	8			
	5	9		
8	9	4		
7				
6	8			
3	5	9		
8	9	4		
7				
6	8			
3	5	9		
9		4		
7				
6	8			
3	5	9		
9	2	4		
7				
6	8			
3	5	9		
	2	4		
7				
6	8			
3	5	9		
1	2	4		

Remarquons que ceci revient à appliquer récursivement l'algorithme du suppression du plus petit élément pour un certain tableau et si l'élément supprimé est  $x$  (le plus petit élément), alors on pose l'élément  $y$  (le plus grand élément) dans la dernière cellule vide ; nous l'avons écrit en gras pour dire qu'il n'appartient pas au tableau. Par exemple, en appliquant cette procédure au tableau  $P$  ci-dessus, on obtient

6		
5	8	
4	7	<b>9</b>
2	3	9

et si nous ajoutons deux autres applications, on obtient

7		
6	8	
5	8	<b>9</b>
4	7	9



<table><tr><td>7</td><td></td><td></td></tr><tr><td>6</td><td>8</td><td></td></tr><tr><td>5</td><td>8</td><td>9</td></tr><tr><td>4</td><td></td><td>9</td></tr></table>	7			6	8		5	8	9	4		9	<table><tr><td>7</td><td></td><td></td></tr><tr><td>6</td><td>8</td><td></td></tr><tr><td>5</td><td></td><td>9</td></tr><tr><td>4</td><td>8</td><td>9</td></tr></table>	7			6	8		5		9	4	8	9	<table><tr><td>7</td><td></td><td></td></tr><tr><td>6</td><td>8</td><td></td></tr><tr><td>5</td><td>7</td><td>9</td></tr><tr><td>4</td><td>8</td><td>9</td></tr></table>	7			6	8		5	7	9	4	8	9	<table><tr><td>7</td><td></td><td></td></tr><tr><td>6</td><td>8</td><td></td></tr><tr><td>5</td><td>7</td><td>9</td></tr><tr><td></td><td>8</td><td>9</td></tr></table>	7			6	8		5	7	9		8	9	<table><tr><td>7</td><td></td><td></td></tr><tr><td>6</td><td>8</td><td></td></tr><tr><td></td><td>7</td><td>9</td></tr><tr><td>5</td><td>8</td><td>9</td></tr></table>	7			6	8			7	9	5	8	9
7																																																																
6	8																																																															
5	8	9																																																														
4		9																																																														
7																																																																
6	8																																																															
5		9																																																														
4	8	9																																																														
7																																																																
6	8																																																															
5	7	9																																																														
4	8	9																																																														
7																																																																
6	8																																																															
5	7	9																																																														
	8	9																																																														
7																																																																
6	8																																																															
	7	9																																																														
5	8	9																																																														
<table><tr><td>7</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td>8</td><td></td></tr><tr><td>6</td><td>7</td><td>9</td></tr><tr><td>5</td><td>8</td><td>9</td></tr></table>	7				8		6	7	9	5	8	9	<table><tr><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>7</td><td>8</td><td></td></tr><tr><td>6</td><td>7</td><td>9</td></tr><tr><td>5</td><td>8</td><td>9</td></tr></table>				7	8		6	7	9	5	8	9	<table><tr><td>6</td><td></td><td></td></tr><tr><td>7</td><td>8</td><td></td></tr><tr><td>6</td><td>7</td><td>9</td></tr><tr><td>5</td><td>8</td><td>9</td></tr></table>	6			7	8		6	7	9	5	8	9	<table><tr><td>6</td><td></td><td></td></tr><tr><td>7</td><td>8</td><td></td></tr><tr><td>6</td><td>7</td><td>9</td></tr><tr><td></td><td>8</td><td>9</td></tr></table>	6			7	8		6	7	9		8	9	<table><tr><td>6</td><td></td><td></td></tr><tr><td>7</td><td>8</td><td></td></tr><tr><td></td><td>7</td><td>9</td></tr><tr><td>6</td><td>8</td><td>9</td></tr></table>	6			7	8			7	9	6	8	9
7																																																																
	8																																																															
6	7	9																																																														
5	8	9																																																														
7	8																																																															
6	7	9																																																														
5	8	9																																																														
6																																																																
7	8																																																															
6	7	9																																																														
5	8	9																																																														
6																																																																
7	8																																																															
6	7	9																																																														
	8	9																																																														
6																																																																
7	8																																																															
	7	9																																																														
6	8	9																																																														
<table><tr><td>6</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td>8</td><td></td></tr><tr><td>7</td><td>7</td><td>9</td></tr><tr><td>6</td><td>8</td><td>9</td></tr></table>	6				8		7	7	9	6	8	9	<table><tr><td>6</td><td></td><td></td></tr><tr><td>5</td><td>8</td><td></td></tr><tr><td>7</td><td>7</td><td>9</td></tr><tr><td>6</td><td>8</td><td>9</td></tr></table>	6			5	8		7	7	9	6	8	9	<table><tr><td>6</td><td></td><td></td></tr><tr><td>5</td><td>8</td><td></td></tr><tr><td>7</td><td>7</td><td>9</td></tr><tr><td></td><td>8</td><td>9</td></tr></table>	6			5	8		7	7	9		8	9	<table><tr><td>6</td><td></td><td></td></tr><tr><td>5</td><td>8</td><td></td></tr><tr><td></td><td>7</td><td>9</td></tr><tr><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr></table>	6			5	8			7	9	7	8	9	<table><tr><td>6</td><td></td><td></td></tr><tr><td>5</td><td>8</td><td></td></tr><tr><td>4</td><td>7</td><td>9</td></tr><tr><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr></table>	6			5	8		4	7	9	7	8	9
6																																																																
	8																																																															
7	7	9																																																														
6	8	9																																																														
6																																																																
5	8																																																															
7	7	9																																																														
6	8	9																																																														
6																																																																
5	8																																																															
7	7	9																																																														
	8	9																																																														
6																																																																
5	8																																																															
	7	9																																																														
7	8	9																																																														
6																																																																
5	8																																																															
4	7	9																																																														
7	8	9																																																														
<table><tr><td>6</td><td></td><td></td></tr><tr><td>5</td><td>8</td><td></td></tr><tr><td>4</td><td>7</td><td>9</td></tr><tr><td></td><td>8</td><td>9</td></tr></table>	6			5	8		4	7	9		8	9	<table><tr><td>6</td><td></td><td></td></tr><tr><td>5</td><td>8</td><td></td></tr><tr><td>4</td><td>7</td><td>9</td></tr><tr><td>8</td><td></td><td>9</td></tr></table>	6			5	8		4	7	9	8		9	<table><tr><td>6</td><td></td><td></td></tr><tr><td>5</td><td>8</td><td></td></tr><tr><td>4</td><td>7</td><td>9</td></tr><tr><td>8</td><td>9</td><td></td></tr></table>	6			5	8		4	7	9	8	9		<table><tr><td>6</td><td></td><td></td></tr><tr><td>5</td><td>8</td><td></td></tr><tr><td>4</td><td>7</td><td>9</td></tr><tr><td>8</td><td>9</td><td>3</td></tr></table>	6			5	8		4	7	9	8	9	3	<table><tr><td>6</td><td></td><td></td></tr><tr><td>5</td><td>8</td><td></td></tr><tr><td>4</td><td>7</td><td>9</td></tr><tr><td></td><td>9</td><td>3</td></tr></table>	6			5	8		4	7	9		9	3
6																																																																
5	8																																																															
4	7	9																																																														
	8	9																																																														
6																																																																
5	8																																																															
4	7	9																																																														
8		9																																																														
6																																																																
5	8																																																															
4	7	9																																																														
8	9																																																															
6																																																																
5	8																																																															
4	7	9																																																														
8	9	3																																																														
6																																																																
5	8																																																															
4	7	9																																																														
	9	3																																																														
<table><tr><td>6</td><td></td><td></td></tr><tr><td>5</td><td>8</td><td></td></tr><tr><td>4</td><td>7</td><td>9</td></tr><tr><td>9</td><td></td><td>3</td></tr></table>	6			5	8		4	7	9	9		3	<table><tr><td>6</td><td></td><td></td></tr><tr><td>5</td><td>8</td><td></td></tr><tr><td>4</td><td>7</td><td>9</td></tr><tr><td>9</td><td>2</td><td>3</td></tr></table>	6			5	8		4	7	9	9	2	3	<table><tr><td>6</td><td></td><td></td></tr><tr><td>5</td><td>8</td><td></td></tr><tr><td>4</td><td>7</td><td>9</td></tr><tr><td></td><td>2</td><td>3</td></tr></table>	6			5	8		4	7	9		2	3	<table><tr><td>6</td><td></td><td></td></tr><tr><td>5</td><td>8</td><td></td></tr><tr><td>4</td><td>7</td><td>9</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr></table>	6			5	8		4	7	9	1	2	3													
6																																																																
5	8																																																															
4	7	9																																																														
9		3																																																														
6																																																																
5	8																																																															
4	7	9																																																														
9	2	3																																																														
6																																																																
5	8																																																															
4	7	9																																																														
	2	3																																																														
6																																																																
5	8																																																															
4	7	9																																																														
1	2	3																																																														

**Remarque 2.38**

Soit  $P$  un tableau standard à  $n$  éléments. Selon la remarque 2.10, on peut identifier  $P$  à un élément de  $\mathcal{I}$  et ainsi on peut définir  $P_{V.R}$  comme un élément de  $\mathcal{I}$  comme suit :

$$P_{V.R} = \sum \left\{ (a_k)_{i_k, j_k} \mid 1 \leq k \leq n \right\},$$

où  $a_k$  désigne le  $k$ -ième élément de  $\{P\}$  par ordre croissant et où

$$(i_k - 1, j_k - 1) = |\Delta^{n-k} P| \setminus |\Delta^{n-k+1} P|, '$$

avec  $\Delta^0 P = P$  et  $\Delta^k P = \Delta(\Delta^{k-1} P)$  pour tout  $1 \leq k \leq n$ . Par exemple, pour

$$P = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & 7 & 9 \\ \hline 2 & 4 & 8 \\ \hline \end{array},$$

on a :

6	7	9
	4	8

6	7	9
4		8

6		9
4	7	8

6	9	9
4	7	8

6	9	9
	7	8

	9	9
6	7	8
9	8	9
6	7	8
9	8	9
	7	8
9	8	9
4	8	9
9	6	7
4	8	9
	6	7
4	8	9
2	6	7

Ainsi

$$P_{V.R} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 8 & 9 \\ \hline 2 & 6 & 7 \\ \hline \end{array}.$$

Remarquons que

$$\Delta P = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & 9 & \\ \hline 4 & 7 & 8 \\ \hline \end{array}, \quad \Delta^2 P = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 9 & & \\ \hline 6 & 7 & 8 \\ \hline \end{array}, \quad \Delta^3 P = \begin{array}{|c|c|} \hline 9 & \\ \hline 7 & 8 \\ \hline \end{array},$$

$$\Delta^4 P = \begin{array}{|c|} \hline 9 \\ \hline 8 \\ \hline \end{array}, \quad \Delta^5 P = \begin{array}{|c|} \hline 9 \\ \hline \end{array}, \quad \Delta^6 P = 0.$$

Ainsi  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = 4$ ,  $a_3 = 6$ ,  $a_4 = 7$ ,  $a_5 = 8$  et  $a_6 = 9$ . On a

$$(i_1, j_1) = (1, 1),$$

$$(i_2, j_2) = (1, 2),$$

$$(i_3, j_3) = (2, 1),$$

$$(i_4, j_4) = (3, 1),$$

$$(i_5, j_5) = (2, 2),$$

$$(i_6, j_6) = (3, 2).$$

Car

$$\begin{aligned}
(i_1 - 1, j_1 - 1) &= |\Delta^{6-1}P| \setminus |\Delta^{6-1+1}P| = |\Delta^5P| \setminus |\Delta^6P| = (0, 0), \\
(i_2 - 1, j_2 - 1) &= |\Delta^{6-2}P| \setminus |\Delta^{6-2+1}P| = |\Delta^4P| \setminus |\Delta^5P| = (0, 1), \\
(i_3 - 1, j_3 - 1) &= |\Delta^{6-3}P| \setminus |\Delta^{6-3+1}P| = |\Delta^3P| \setminus |\Delta^4P| = (1, 0), \\
(i_4 - 1, j_4 - 1) &= |\Delta^{6-4}P| \setminus |\Delta^{6-4+1}P| = |\Delta^2P| \setminus |\Delta^3P| = (2, 0), \\
(i_5 - 1, j_5 - 1) &= |\Delta^{6-5}P| \setminus |\Delta^{6-5+1}P| = |\Delta^1P| \setminus |\Delta^2P| = (1, 1), \\
(i_6 - 1, j_6 - 1) &= |\Delta^{6-6}P| \setminus |\Delta^{6-6+1}P| = |\Delta^0P| \setminus |\Delta^1P| = (2, 1).
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
P_{V.R} &= \sum \left\{ (a_k)_{i_k, j_k} \mid 1 \leq k \leq 6 \right\} \\
&= (a_1)_{i_1, j_1} + (a_2)_{i_2, j_2} + (a_3)_{i_3, j_3} + (a_4)_{i_4, j_4} + (a_5)_{i_5, j_5} + (a_6)_{i_6, j_6} \\
&= (2)_{1,1} + (4)_{1,2} + (6)_{2,1} + (7)_{3,1} + (8)_{2,2} + (9)_{3,2} \\
&= \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 8 & 9 \\ \hline 2 & 6 & 7 \\ \hline \end{array}.
\end{aligned}$$

Trivialement,  $\{P\} = \{P_{V.R}\}$ ,  $|P| = |P_{V.R}|$  et  $(P_{V.R})^T = (P^T)_{V.R}$  où  $T$  indique la transposition. De plus si  $\alpha : \{P\} \setminus \{a_1\} \rightarrow \{P\} \setminus \{a_n\}$ , l'application définie par  $\alpha(a_{k+1}) = a_k$  pour tout  $1 \leq k \leq n-1$ , est étendue de façon naturelle à  $\mathfrak{J}$ , on vérifie sans peine que

$$P_{V.R} = \alpha((\Delta P)_{V.R}) + (a_n)_{i_n, j_n}.$$

Pour le tableau  $P$  donné ci-dessus, on a

$$\begin{aligned}
P_{V.R} &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 8 & 9 \\ \hline 2 & 6 & 7 \\ \hline \end{array}, & \Delta P &= \begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 9 \\ \hline 4 & 7 & 8 \\ \hline \end{array}, \\
(\Delta P)_{V.R} &= \begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 9 \\ \hline 4 & 7 & 8 \\ \hline \end{array}, & \alpha((\Delta P)_{V.R}) &= \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 8 \\ \hline 2 & 6 & 7 \\ \hline \end{array}.
\end{aligned}$$



Ainsi

$$\begin{aligned}
 \alpha((\Delta P)_{V,R}) + (a_6)_{i_6, j_6} &= \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 8 \\ \hline 2 & 6 & 7 \\ \hline \end{array} + (9)_{3,2} \\
 &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 8 & 9 \\ \hline 2 & 6 & 7 \\ \hline \end{array} \\
 &= P_{V,R}.
 \end{aligned}$$

Ce fait est l'une des conséquences du théorème suivant :

**Théorème 2.39** (C. Schensted, M. P. Schützenberger).

Soit  $\sigma = x_1 x_2 \dots x_n$  la permutation qui correspond à la paire  $(P, Q)$  de tableaux de Young standards par la correspondance de Robinson-Schensted, alors  $\sigma^*$ , l'image miroir de  $\sigma$ , correspond à la paire  $(P^T, Q_{V,R}^T)$  où  $P^T$  est le tableau  $P$  transposé et  $Q_{V,R}^T$  est obtenu de  $Q$  par transposition et en appliquant l'algorithme de "vidage-remplissage", dû à Schützenberger. Autrement dit

$$(P(\sigma^*), Q(\sigma^*)) = (P^T(\sigma), Q_{V,R}^T(\sigma)).$$

Pour démontrer ce théorème, on a besoin du lemme suivant :

**Lemme 2.40**

Si  $A \neq \emptyset$ , on a identiquement

$$\Delta Q(\sigma, A) = Q(\sigma, A \setminus \{a_1\}).$$

où  $a_1 = \min(A)$ .

**Preuve**

Le résultat peut être vérifié directement pour  $\text{Card } A = 1$ . En effet, dans ce cas le tableau  $Q(\sigma, A)$  a une seule entrée et donc  $\Delta Q(\sigma, A) = 0$  et  $Q(\sigma, A \setminus \{a_1\}) = 0$  où 0 est le tableau vide.

Posons  $A' = A \setminus \{a_1\}$  et selon les notations données à la remarque 2.10, il suffit de vérifier que

$$\Delta Q(\sigma, A_{m-1}) = Q(\sigma, A'_{m-2}) \Rightarrow \Delta Q(\sigma, A_m) = Q(\sigma, A'_{m-1}) \text{ pour tout } m > 1.$$

Par définition, il existe  $(i, j)$  et  $(i', j') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  tels que

$$Q(\sigma, A'_{m-1}) = Q(\sigma, A'_{m-2}) + (a_m)_{i', j'}$$

et

$$\Delta Q(\sigma, A_m) = \Delta Q(\sigma, A_{m-1}) + (a_m)_{i,j}.$$

D'après l'hypothèse d'induction, on a :

$$\begin{aligned} \Delta Q(\sigma, A_m) &= \Delta Q(\sigma, A_{m-1}) + (a_m)_{i,j} \\ &= Q(\sigma, A'_{m-2}) + (a_m)_{i,j} \\ &= \left( Q(\sigma, A'_{m-1}) - (a_m)_{i',j'} \right) + (a_m)_{i,j} \\ &= Q(\sigma, A'_{m-1}) + (a_m)_{i,j} - (a_m)_{i',j'}. \end{aligned}$$

Ainsi, il ne reste qu'à vérifier  $(i, j) = (i', j')$ .

D'après le lemme 2.27, on a :

$$\begin{aligned} P(\sigma, B_m) &= P(\sigma, B_{m-1}) \leftarrow \sigma(a_m) \\ &= (\dots((\sigma(a_1) \leftarrow \sigma(a_2)) \leftarrow \sigma(a_3)) \dots \leftarrow \sigma(a_{m-1})) \leftarrow \sigma(a_m) \\ &= (\sigma(a_1) \rightarrow \dots(\sigma(a_{m-2}) \rightarrow \sigma(a_{m-1})) \dots) \leftarrow \sigma(a_m) \\ &= (\sigma(a_1) \rightarrow \dots(\sigma(a_{m-2}) \rightarrow \sigma(a_{m-1})) \dots) \leftarrow \sigma(a_m) \\ &= (\sigma(a_1) \rightarrow (\dots(\sigma(a_2) \leftarrow \sigma(a_3)) \dots \leftarrow \sigma(a_{m-1}))) \leftarrow \sigma(a_m) \\ &= (\sigma(a_1) \rightarrow (\dots(\sigma(a'_1) \leftarrow \sigma(a'_2)) \dots \leftarrow \sigma(a'_{m-2}))) \leftarrow \sigma(a_m) \\ &= (\sigma(a_1) \rightarrow P(\sigma, B'_{m-2})) \leftarrow \sigma(a_m) \\ &= \sigma(a_1) \rightarrow (P(\sigma, B'_{m-2}) \leftarrow \sigma(a_m)) \\ &= \sigma(a_1) \rightarrow (P(\sigma, B'_{m-2}) \leftarrow \sigma(a'_{m-1})) \\ &= \sigma(a_1) \rightarrow P(\sigma, B'_{m-1}). \end{aligned}$$

En utilisant l'identité de forme des  $P$ -symboles et des  $Q$ -symbols on a :

$$|Q(\sigma, A_{m-1})| \setminus |Q(\sigma, A'_{m-2})| = (i'' - 1, j'' - 1)$$

et

$$|Q(\sigma, A_m)| \supset |Q(\sigma, A'_{m-2})| \cup \{(i-1, j-1), (i'-1, j'-1), (i''-1, j''-1)\},$$

car

$$(i'' - 1, j'' - 1) \in |Q(\sigma, A_{m-1})| \subset |Q(\sigma, A_m)|,$$

$$(i' - 1, j' - 1) \in |Q(\sigma, A'_{m-1})| = |P(\sigma, B'_{m-1})| \subset |P(\sigma, B_m)| = |Q(\sigma, A_m)|$$

et

$$(i - 1, j - 1) \in |\Delta Q(\sigma, A_m)| \subset |Q(\sigma, A_m)|.$$

Distinguons maintenant deux cas :

- $(i, j) \neq (i'', j'')$  : comme  $P(\sigma, B_m) = \sigma(a_1) \longrightarrow (P(\sigma, B'_{m-2}) \longleftarrow \sigma(a_m))$ , alors

$$|P(\sigma, B_m)| \setminus |P(\sigma, B'_{m-2})|$$

est un ensemble qui contient seulement deux cellules différentes. Mais l'identité de forme des  $P$ -symboles et des  $Q$ -symboles implique que

$$|P(\sigma, B_m)| \setminus |P(\sigma, B'_{m-2})| = |Q(\sigma, A_m)| \setminus |Q(\sigma, A'_{m-2})|.$$

D'après ce qui précède,  $(i-1, j-1)$  et  $(i''-1, j''-1)$  sont deux cellules différentes qui appartiennent à

$$|Q(\sigma, A_m)| \setminus |Q(\sigma, A'_{m-2})|.$$

Ainsi

$$|Q(\sigma, A_m)| \setminus |Q(\sigma, A'_{m-2})| = \{(i-1, j-1), (i''-1, j''-1)\}.$$

Donc

$$\begin{aligned} |Q(\sigma, A_m)| &= |Q(\sigma, A'_{m-2})| \cup \{(i-1, j-1), (i''-1, j''-1)\} \\ &= (|Q(\sigma, A'_{m-2})| \cup \{i''-1, j''-1\}) \cup \{(i-1, j-1)\} \\ &= |Q(\sigma, A_{m-1})| \cup \{(i-1, j-1)\}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$Q(\sigma, A_m) = Q(\sigma, A_{m-1}) + (a_m)_{i,j}.$$

Comme

$$\begin{aligned} P(\sigma, B_m) &= P(\sigma, B_{m-1}) \longleftarrow \sigma(a_m) \\ &= \sigma(a_1) \longrightarrow P(\sigma, B'_{m-1}) \\ &= \sigma(a_1) \longrightarrow (P(\sigma, B'_{m-2}) \longleftarrow \sigma(a_m)) \\ &= (\sigma(a_1) \longrightarrow P(\sigma, B'_{m-2})) \longleftarrow \sigma(a_m), \end{aligned}$$

alors la commutativité des opérations  $\longrightarrow$  et  $\longleftarrow$  implique la relation

$$\begin{aligned} Q(\sigma, A_m) - Q(\sigma, A_{m-1}) &= Q(\sigma, A'_{m-1}) - Q(\sigma, A'_{m-2}) \\ &= (a_m)_{i',j'} \\ &= (a_m)_{i,j}. \end{aligned}$$

Donc  $(i, j) = (i', j')$ , ce qui implique que

$$\begin{aligned}\Delta Q(\sigma, A_m) &= Q(\sigma, A'_{m-1}) + (a_m)_{i,j} - (a_m)_{i',j'} \\ &= Q(\sigma, A'_{m-1}) + (a_m)_{i,j} - (a_m)_{i,j} \\ &= Q(\sigma, A'_{m-1}).\end{aligned}$$

Remarquons que l'élément  $a_m$  est dans  $Q(\sigma, A_m)$  dans la case  $(i-1, j-1)$  car  $Q(\sigma, A_m) = Q(\sigma, A_{m-1}) + (a_m)_{i,j}$ . Mais après la suppression de l'élément  $a_1$  du tableau  $Q(\sigma, A_m)$ , l'élément  $a_m$  est resté dans  $\Delta Q(\sigma, A_m)$  dans la case  $(i-1, j-1)$  car  $\Delta Q(\sigma, A_m) = \Delta Q(\sigma, A_{m-1}) + (a_m)_{i,j}$ . Ceci implique que l'élément  $a_m$  n'a pas été déplacé pendant la procédure de suppression précédente.

•  $(i, j) = (i'', j'')$  : On a

$$\begin{aligned}|Q(\sigma, A_{m-1})| &= |Q(\sigma, A'_{m-2})| \cup \{(i''-1, j''-1)\} \\ &= |Q(\sigma, A'_{m-2})| \cup \{(i-1, j-1)\}.\end{aligned}$$

Posons

$$|P(\sigma, B_m)| \setminus |P(\sigma, B_{m-1})| = \{(\bar{i}, \bar{j})\},$$

ainsi en utilisant l'identité de forme des  $P$ -symboles et des  $Q$ -symboles, on obtient

$$|Q(\sigma, A_m)| \setminus |Q(\sigma, A_{m-1})| = \{(\bar{i}, \bar{j})\},$$

ce qui implique que

$$Q(\sigma, A_m) = Q(\sigma, A_{m-1}) + (a_m)_{\bar{i}+1, \bar{j}+1}.$$

On a

$$\begin{aligned}|Q(\sigma, A_m)| &= |Q(\sigma, A_{m-1})| \cup \{(\bar{i}, \bar{j})\} \\ &= (|Q(\sigma, A'_{m-2})| \cup \{(i-1, j-1)\}) \cup \{(\bar{i}, \bar{j})\}.\end{aligned}$$

Comme  $(\bar{i}, \bar{j}) \notin |Q(\sigma, A_{m-1})|$  et  $(i-1, j-1) \in |Q(\sigma, A_{m-1})|$ , alors  $(i-1, j-1) \neq (\bar{i}, \bar{j})$ . Ainsi  $(i-1, j-1)$  et  $(\bar{i}, \bar{j})$  sont deux cellules différentes qui appartiennent à

$$|Q(\sigma, A_m)| \setminus |Q(\sigma, A'_{m-2})|,$$

ce qui implique que

$$|Q(\sigma, A_m)| \setminus |Q(\sigma, A'_{m-2})| = \{(i-1, j-1), (\bar{i}, \bar{j})\}.$$

Remarquons que l'élément  $a_m$  est dans  $Q(\sigma, A_m)$  dans la case  $(\bar{i}, \bar{j})$  car  $Q(\sigma, A_m) = Q(\sigma, A_{m-1}) + (a_m)_{\bar{i}+1, \bar{j}+1}$ . Mais après la suppression de l'élément  $a_1$  du tableau  $Q(\sigma, A_m)$ , l'élément  $a_m$  est dans  $\Delta Q(\sigma, A_m)$  dans la case  $(i-1, j-1)$  car

$$\Delta Q(\sigma, A_m) = \Delta Q(\sigma, A_{m-1}) + (a_m)_{i,j}.$$

Le fait que  $(i-1, j-1) \neq (\bar{i}, \bar{j})$ , implique que l'élément  $a_m$  a été déplacé de la case  $(\bar{i}, \bar{j})$  vers la case  $(i-1, j-1)$  pendant la procédure de suppression précédente. Si ce déplacement est vers la gauche, alors  $(\bar{i}, \bar{j}) = (i, j-1)$  et si ce déplacement est vers le bas, alors  $(\bar{i}, \bar{j}) = (i-1, j)$ . Comme  $|Q(\sigma, A'_{m-2})| \cup \{(i-1, j-1), (\bar{i}, \bar{j})\}$  est la forme du tableau standard  $Q(\sigma, A_m)$  et comme  $(\bar{i}, \bar{j}) = (i, j-1)$  ou  $(\bar{i}, \bar{j}) = (i-1, j)$ , alors  $|Q(\sigma, A'_{m-2})| \cup (\bar{i}, \bar{j})$  n'est pas la forme d'un tableau standard.

Les cellules  $(i-1, j-1)$ ,  $(i'-1, j'-1)$  et  $(\bar{i}, \bar{j})$  n'appartiennent pas à  $|Q(\sigma, A'_{m-2})|$ . De plus,

$$|Q(\sigma, A'_{m-2})| \cup \{(i-1, j-1), (i'-1, j'-1)\} \subset |Q(\sigma, A_m)| = |Q(\sigma, A'_{m-2})| \cup \{(i-1, j-1), (\bar{i}, \bar{j})\}.$$

Ceci implique que  $(i', j') = (i, j)$ . En effet, comme  $(i', j') \in \{(i, j), (\bar{i}, \bar{j})\}$ , alors il suffit de montrer que  $(i', j') \neq (\bar{i}, \bar{j})$ . Supposons le contraire, i.e.  $(i', j') = (\bar{i}, \bar{j})$ , ainsi on obtient la contradiction suivante :

d'une part, on a montré que  $|Q(\sigma, A'_{m-2})| \cup (\bar{i}, \bar{j})$  n'est pas la forme d'un tableau standard et d'autre part, on a

$$\begin{aligned} |Q(\sigma, A'_{m-2})| \cup (\bar{i}, \bar{j}) &= |Q(\sigma, A'_{m-2})| \cup (i', j') \\ &= |Q(\sigma, A'_{m-1})| \end{aligned}$$

avec  $|Q(\sigma, A'_{m-1})|$  la forme du tableau standard  $Q(\sigma, A'_{m-1})$ . La preuve de ce lemme est terminée.

Maintenant, nous donnons la preuve du théorème .

**Preuve** (du théorème 2.39)

D'après le lemme 2.27 ci-dessus, on a

$$P(\sigma^*, B) = P(\sigma, B)^T$$

Nous vérifions par induction sur  $n$  que

$$Q(\sigma^*, A) = Q_{V.R}^T(\sigma, A),$$

où  $A = \{1, \dots, n\}$ .

Remarquons que le résultat est vrai pour  $n = 1$  car dans ce cas  $\sigma = \sigma^*$  et  $Q(\sigma)$  a une seule entrée  $Q_{11} = 1$ . Ainsi  $Q(\sigma^*) = Q(\sigma) = Q^T(\sigma) = Q_{V.R}(\sigma) = Q_{V.R}^T(\sigma)$ .

Supposons que le résultat est déjà établi pour  $n - 1$ . Posons  $A' = \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{1\} = \{2, \dots, n\}$  et  $A_{n-1} = \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{n\} = \{1, \dots, n - 1\}$ .

Remarquons que  $A_{n-1} = \alpha A'$  où  $\alpha : \{P\} \setminus \{1\} \longrightarrow \{P\} \setminus \{n\}$  définie par  $\alpha(k + 1) = k$  pour tout  $1 \leq k \leq n - 1$ . En effet,

$$\begin{aligned} \alpha A' &= \alpha \{2, \dots, n\} \\ &= \{\alpha(2), \dots, \alpha(n)\} \\ &= \{1, \dots, n - 1\} \\ &= \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{n\} \\ &= A_{n-1}. \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse d'induction, on a :

$$\begin{aligned} \left( Q(\sigma^*, A') = Q(\sigma, A')_{V.R}^T \right) &\Rightarrow \alpha Q(\sigma^*, A') = \alpha Q(\sigma, A')_{V.R}^T \\ &\Rightarrow Q(\sigma^*, \alpha A') = \alpha Q(\sigma, A')_{V.R}^T \\ &\Rightarrow Q(\sigma^*, A_{n-1}) = \alpha Q(\sigma, A')_{V.R}^T \\ &\Rightarrow Q(\sigma^*, A_{n-1}) = Q(\sigma, \alpha A')_{V.R}^T \\ &\Rightarrow Q(\sigma^*, A_{n-1}) = Q(\sigma, A_{n-1})_{V.R}^T. \end{aligned}$$

Maintenant,

$$Q(\sigma^*, A) = Q(\sigma^*, A_{n-1}) + (n)_{i,j},$$

et comme on l'a noté plus haut à la remarque 2.38

$$\begin{aligned} Q(\sigma, A)_{V.R}^T &= \left( \alpha(\Delta Q(\sigma, A))_{V.R} + (n)_{i_n, j_n} \right)^T \\ &= \left( \alpha(\Delta Q(\sigma, A))_{V.R} \right)^T + \left( (n)_{i_n, j_n} \right)^T \\ &= \alpha(\Delta Q(\sigma, A))_{V.R}^T + (n)_{j_n, i_n}. \end{aligned}$$

D'après le lemme 2.40,  $\Delta Q(\sigma, A) = Q(\sigma, A')$  et par conséquent,

$$\begin{aligned}
Q(\sigma^*, A) &= Q(\sigma^*, A_{n-1}) + (n)_{i,j} \\
&= \alpha Q(\sigma, A')_{V,R}^T + (n)_{i,j} \\
&= \alpha (\Delta Q(\sigma, A))_{V,R}^T + (n)_{i,j} \\
&= \left( Q(\sigma, A)_{V,R}^T - (n)_{j_n, i_n} \right) + (n)_{i,j}.
\end{aligned}$$

Il suffit donc de vérifier  $|Q(\sigma^*, A)| = |Q(\sigma, A)_{V,R}^T|$ . Or ceci résulte immédiatement de  $|Q(\sigma, A)_{V,R}| = |Q(\sigma, A)|$ , de l'égalité de forme des  $P$ -symboles et des  $Q$ -symboles et de l'égalité  $|P(\sigma^*, A)| = |P(\sigma, A)^T|$  impliquée par l'identité de Schensted. En effet,

$$\begin{aligned}
|Q(\sigma^*, A)| &= |P(\sigma^*, A)| \\
&= |P(\sigma, A)^T| \\
&= |Q(\sigma, A)^T| \\
&= \left| \left( Q(\sigma, A)^T \right)_{V,R} \right| \\
&= |Q(\sigma, A)_{V,R}^T|.
\end{aligned}$$

Donc, la formule est établie.

#### Remarque 2.41

En utilisant le théorème 2.19 et le lemme 2.40, on peut démontrer le théorème 2.25. En effet, il suffit de montrer que si  $\sigma : A \longrightarrow B$  est une bijection comme plus haut dans la remarque 2.10, alors

$$\Delta P(\sigma, B) = P(\sigma, B \setminus \{b\}),$$

où  $a$  est l'élément dans  $A$  tel que  $\sigma(a) = b$  et  $b$  est le plus petit élément dans  $B$ .

Par le théorème 2.19, on a :

$$P(\sigma, B) = Q(\sigma^{-1}, B),$$

où  $\sigma^{-1}$  est la bijection inverse de  $\sigma$ . Mais, par le lemme 2.40, on a :

$$\Delta Q(\sigma^{-1}, B) = Q(\sigma^{-1}, B \setminus \{b\}).$$

Ainsi, par le théorème 2.19, on obtient

$$\begin{aligned}
Q(\sigma^{-1}, B \setminus \{b\}) &= P((\sigma^{-1})^{-1}, B \setminus \{b\}) \\
&= P(\sigma, B \setminus \{b\}).
\end{aligned}$$

où la restriction de  $\sigma$  à  $A \setminus \{a\}$  qui est une bijection de  $A \setminus \{a\}$  vers  $B \setminus \{b\}$  est encore dénotée par  $\sigma$  et sa bijection inverse est encore dénotée par  $\sigma^{-1}$ . Par conséquent,

$$\begin{aligned} \Delta P(\sigma, B) &= \Delta Q(\sigma^{-1}, B) \\ &= Q(\sigma^{-1}, B \setminus \{b\}) \\ &= P((\sigma^{-1})^{-1}, B \setminus \{b\}) \\ &= P(\sigma, B \setminus \{b\}). \end{aligned}$$

Pour faire le lien avec l'énoncé du théorème 2.25, il suffit de poser  $B = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  et donc  $b = x_i$ .



## CHAPITRE III

### CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE DE VIENNOT.

Dans ce chapitre, nous présentons une version géométrique de la correspondance de Robinson-Schensted introduite par Viennot. Cette version géométrique fournit un cadre naturel à toutes les propriétés classiques de cette correspondance.

#### 3.1 Squelette d'une permutation

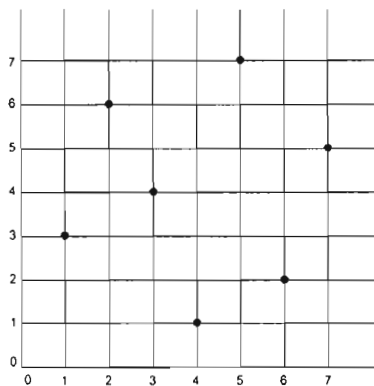
À toute permutation  $\sigma$  de  $\mathcal{S}_n$ , on associe l'ensemble  $\hat{\sigma}$  des points du plan  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$$\hat{\sigma} = \{(i, \sigma(i)) \in [n] \times [n] \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

Par exemple, si  $\sigma$  est la permutation de  $\mathcal{S}_7$  définie par  $\sigma = 3641725$ , alors

$$\hat{\sigma} = \{(1, 3), (2, 6), (3, 4), (4, 1), (5, 7), (6, 2), (7, 5)\}.$$

Cette ensemble  $\hat{\sigma}$  est représenté par la figure 3.1 ci-dessous.



**Figure 3.1**  $\hat{\sigma} = \{(1, 3), (2, 6), (3, 4), (4, 1), (5, 7), (6, 2), (7, 5)\}.$

Plus généralement, nous donnons la définition suivante :

**Définition 3.1**

Nous appelons *quasi-permutation* toute partie finie  $\tau$  de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  ayant au plus un point par ligne et par colonne, i.e. vérifiant la condition :

$$(x, y) \neq (x', y') \Rightarrow x \neq x' \text{ et } y \neq y', \text{ pour tous } (x, y), (x', y') \in \tau. \quad (3.1)$$

Soient  $pr_x$  et  $pr_y$  les deux projections de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  associant à  $(x, y)$  respectivement son abscisse  $x$  et son ordonnée  $y$ . Le support d'une quasi-permutation  $\tau$  est défini comme suit :

**Définition 3.2**

Soit  $\tau$  une quasi-permutation. Le support de  $\tau$ , q'on note  $\text{Supp}(\tau)$ , est défini par

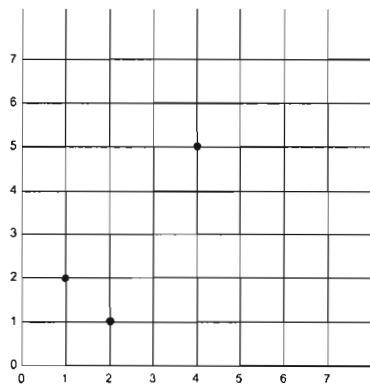
$$\text{Supp}(\tau) = pr_x(\tau) \times pr_y(\tau),$$

où  $\times$  désigne le produit cartésien.

Par exemple, si  $\tau$  est la quasi-permutation définie par  $\tau = \{(1, 2), (2, 1), (4, 5)\}$ , alors

$$\text{Supp}(\tau) = \{1, 2, 4\} \times \{1, 2, 5\},$$

(voir la figure 3.2 ci-dessous).



**Figure 3.2**  $\text{Supp}(\tau) = \{1, 2, 4\} \times \{1, 2, 5\}$ .

### Remarque 3.3

Toute quasi-permutation peut être identifiée à une permutation relativement à son support. Plus précisément, lorsque  $\text{Supp}(\tau) \subseteq [n] \times [n]$ , i.e. lorsque  $\tau$  est une partie d'un certain ensemble  $\hat{\sigma}$  associé à une permutation  $\sigma$  de  $\mathcal{S}_n$ , nous dirons que  $\tau$  est *une quasi-permutation de  $[n]$* . Nous pourrions alors identifier  $\tau$  avec le mot  $\tau(1)\tau(2)\dots\tau(n)$ , de longueur  $n$ , en les lettres  $0, 1, 2, \dots, n$ , défini par

$$\tau(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau \text{ n'a aucun point d'abscisse } i, \\ y & \text{si } (i, y) \in \tau. \end{cases}$$

Pour la quasi-permutation  $\tau = \{(1, 2), (2, 1), (4, 5)\}$ , on a

$$\text{Supp}(\tau) = \{1, 2, 4\} \times \{1, 2, 5\} \subseteq [5] \times [5],$$

ainsi  $\tau$  est une quasi-permutation de  $[5]$ , qu'on peut identifier avec le mot 21050. On peut aussi remarquer que  $\text{Supp}(\tau) \subseteq [6] \times [6]$  et ainsi  $\tau$  est une quasi-permutation de  $[6]$ , qu'on peut identifier avec le mot 210500.

Dans le plan  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  (et non pas  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  par commodité pour la suite de ce travail), nous considérons les deux relations d'ordre suivantes :

*l'ordre naturel*  $\leq$  défini pour tous  $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  par :

$$(x, y) \leq (x', y') \text{ si et seulement si } x \leq x' \text{ et } y \leq y',$$

et *l'ordre croisé*  $\leq_C$  défini pour tous  $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  par :

$$(x, y) \leq_C (x', y') \text{ si et seulement si } x \leq x' \text{ et } y' \leq y.$$

En imaginant que le plan est éclairé par le coin inférieur gauche, i.e. chaque point du plan a un éclairage par le côté inférieur gauche, on définit certaines zones d'ombre de points du plan  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

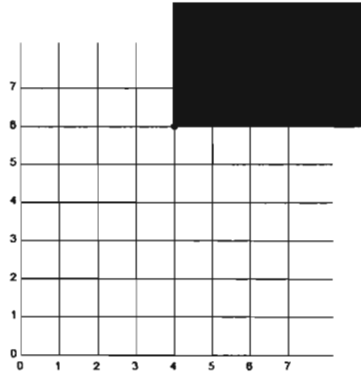
### Définition 3.4

*L'ombre  $O(m)$  d'un point  $m = (x, y)$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  est l'ensemble des points  $m' \geq m$  pour l'ordre naturel.*

Ainsi

$$\begin{aligned}
 O((x, y)) &= O(m) \\
 &= \{m' = (x', y') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid m' \geq m\} \\
 &= \{(x', y') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \leq x' \text{ et } y \leq y'\}.
 \end{aligned}$$

Comme cette notion d'ombre fait référence intuitivement à un éclairage du plan  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  par le coin inférieur gauche, alors, lorsqu'une confusion est à craindre, on ajoutera l'adjectif inférieur gauche et nous écrirons  $O_g^-(m)$  pour  $O(m)$ . La figure 3.3 ci-dessous montre l'ombre  $O_g^-((4, 6))$ .



**Figure 3.3** L'ombre  $O_g^-((4, 6))$ .

### Remarque 3.5

De la même manière, on peut définir trois autres notions qui correspondent aux trois autres sortes d'éclairage du plan : l'éclairage par le coin inférieur droit, l'éclairage par le coin supérieur gauche et l'éclairage par le coin supérieur droit. Elles seront notées respectivement  $O_d^-(m)$ ,  $O_g^+(m)$  et  $O_d^+(m)$ . Les figures 3.4, 3.5 et 3.6 ci-dessous montrent respectivement les ombres  $O_d^-((4, 6))$ ,  $O_g^+((4, 6))$  et  $O_d^+((4, 6))$ .

Remarquons que

$$\begin{aligned}
 O_g^+((4, 6)) &= \{m' = (x', y') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid (4, 6) \leq_C m'\} \\
 &= \{(x', y') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 4 \leq x' \text{ et } y' \leq 6\}.
 \end{aligned}$$

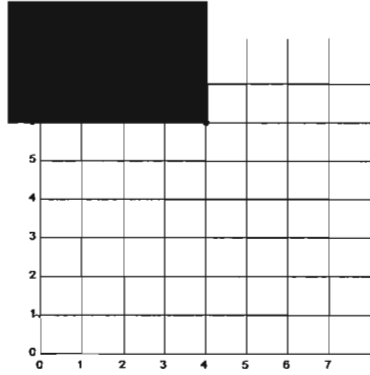


Figure 3.4 L'ombre  $O_d^-((4, 6))$ .

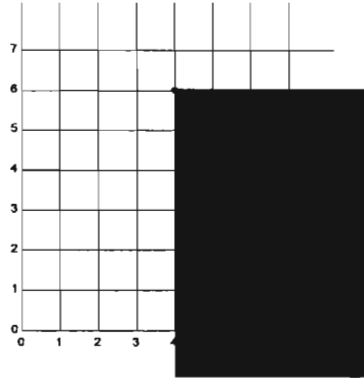


Figure 3.5 L'ombre  $O_g^+((4, 6))$ .

### Définition 3.6

Soit  $P$  une partie de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Nous appellerons ombre (inférieur gauche) de  $P$  la réunion  $O_g^-(P)$  des ombres de ses points, i.e.

$$O_g^-(P) = \bigcup_{m \in P} O_g^-(m).$$

Maintenant, parmi les points de  $P$ , on peut distinguer certains points particuliers

### Définition 3.7

Nous appellerons un point saillant (inférieur gauche) de  $P$  un point de  $P$  qui n'est dans l'ombre d'aucun autre point de  $P$ . Nous notons  $S_g^-(P)$  l'ensemble des points saillants de  $P$ .

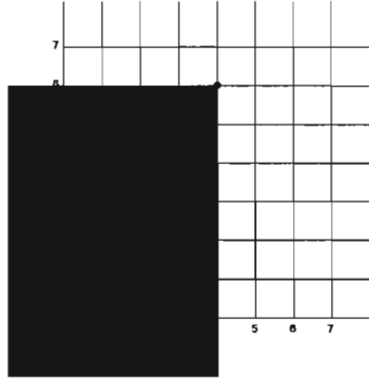


Figure 3.6 L'ombre  $O_d^+((4,6))$ .

Ainsi

$$\begin{aligned}
 S_g^-(P) &= \{m \in P \mid m \notin O(m'), \forall m' \in P \setminus \{m\}\} \\
 &= \{(x, y) \in P \mid (x, y) \notin O((x', y')), \forall (x', y') \in P \setminus \{(x, y)\}\} \\
 &= \{(x, y) \in P \mid x' > x \text{ ou } y' > y, \forall (x', y') \in P \setminus \{(x, y)\}\}.
 \end{aligned}$$

### Remarque 3.8

L'ensemble  $S_g^-(P)$  est totalement ordonné pour l'ordre croisé. Autrement dit, les points de  $S_g^-(P)$  forment une chaîne pour l'ordre croisé. Ainsi, si  $P$  est finie, il est aisé de voir qu'il existe un et un seul ensemble  $\tau = \{m_1, \dots, m_p\}$  de points de  $P$  formant une chaîne  $\{m_1 <_C m_2 <_C \dots <_C m_p\}$  pour l'ordre croisé, tel que  $O(P) = O(\tau)$  et vérifiant la condition (3.1) ci-dessus. Cet ensemble  $\tau$  est précisément  $S_g^-(P)$ . En effet, si  $(x, y), (x', y')$  sont deux points distincts dans  $S_g^-(P)$ , alors  $(x, y) \leq_C (x', y')$  ou  $(x', y') \leq_C (x, y)$  car

$$\begin{aligned}
 [(x, y), (x', y') \in S_g^-(P)] &\Rightarrow (x, y) \notin O((x', y')) \text{ et } (x', y') \notin O((x, y)) \\
 &\Rightarrow (x' > x \text{ ou } y' > y) \text{ et } (x > x' \text{ ou } y > y') \\
 &\Rightarrow ((x' > x \text{ ou } y' > y) \text{ et } x > x') \text{ ou} \\
 &\quad ((x' > x \text{ ou } y' > y) \text{ et } y > y') \\
 &\Rightarrow (x' > x \text{ et } x > x') \text{ ou } (y' > y \text{ et } x > x') \\
 &\quad \text{ou } (x > x' \text{ et } y > y') \text{ ou } (y' > y \text{ et } y > y') \\
 &\Rightarrow (y' > y \text{ et } x > x') \text{ ou } (x > x' \text{ et } y > y') \\
 &\Rightarrow (x, y) \leq_C (x', y') \text{ ou } (x', y') \leq_C (x, y).
 \end{aligned}$$

Par exemple, si  $P = \hat{\sigma}$  où  $\sigma = 3641725$  une permutation de  $S_7$ , alors

$$S_g^-(\hat{\sigma}) = \{(1, 3), (4, 1)\}.$$

En effet,  $\{(2, 6), (3, 4), (5, 7), (7, 5)\} \subseteq O((1, 3))$  et  $\{(5, 7), (6, 2), (7, 5)\} \subseteq O((4, 1))$ . Mais les points  $(1, 3)$  et  $(4, 1)$  ne sont dans l'ombre d'aucun autre point de  $\hat{\sigma}$  (voir la figure 3.7 ci-dessous).

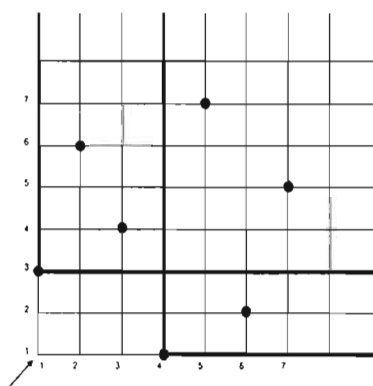


Figure 3.7 Les points saillants  $(1, 3)$  et  $(4, 1)$ .

### Définition 3.9

Soit  $P$  une partie finie non vide de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Une ligne saillante (inférieure gauche)  $L = L(P)$  correspondante à  $P$  est définie comme la frontière du fermé  $O(P)$ .

Si  $m_1, \dots, m_p$  sont tous les points saillants (inférieurs gauches) de  $P$ , alors

$$\begin{aligned} L &= L(P) \\ &= L\left(\bigcup_{i=1}^p O(m_i)\right). \end{aligned}$$

En particulier, si  $P = \{m\}$ , alors on écrit  $L(P) = L(m)$  et on dit que  $L$  est la ligne saillante du point  $m$ . Si  $m = (x_m, y_m) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , alors la ligne  $L(m)$  est la réunion des demi-droites

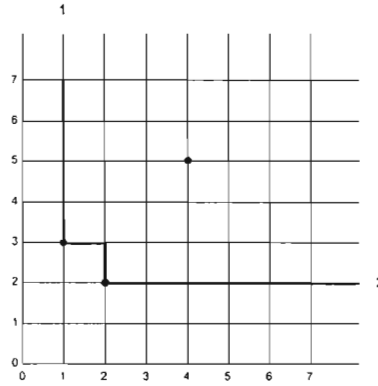
$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \geq x_m \text{ et } y = y_m\}$$

et

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = x_m \text{ et } y \geq y_m\}.$$

**Remarque 3.10**

Si  $P$  est une quasi-permutation, alors la ligne saillante de  $P$  est une ligne brisée  $L$  constituée de segments et exactement d'une seule demi-droite horizontale et d'une seule demi-droite verticale. Nous appelons  $x$ -coordonnée de  $L$  l'abscisse d'un point de sa demi-droite verticale et on la note  $x_L$  et nous appelons  $y$ -coordonnée de  $L$  l'ordonnée d'un point de sa demi-droite horizontale et on la note  $y_L$ . Par exemple, si  $P = \{(1, 3), (2, 2), (4, 5)\}$ , alors la ligne saillante  $L$  de  $P$  est la frontière du fermé  $O((1, 3)) \cup O((2, 2))$  car  $(1, 3)$  et  $(2, 2)$  sont les points saillants (inférieurs gauches) de  $P$ . Dans la figure 3.8 ci-dessous cette ligne saillante est en gras. Sa  $x$ -coordonnée est 1 et sa  $y$ -coordonnée est 2; elles sont illustrées en haut et à droite de son diagramme respectivement.



**Figure 3.8** La ligne saillante  $L(\tau)$ .

Posons

$$\tau = S_g^-(P) = S_g^-(L).$$

On sait que  $\tau$  est une chaîne  $\{m_1 \leq_C m_2 \leq_C \dots \leq_C m_p\}$  pour l'ordre croisé et que l'on a  $O(\tau) = O(P)$ . Pour  $i = 1, 2, \dots, p$ , soit  $L(m_i)$  la ligne saillante du point  $m_i = (x_i, y_i)$ . Ainsi, pour  $i = 1, 2, \dots, p - 1$ , les lignes saillantes  $L(m_i)$  et  $L(m_{i+1})$  de  $m_i = (x_i, y_i)$  et  $m_{i+1} = (x_{i+1}, y_{i+1})$  ont une intersection réduite à un seul point, à savoir  $(x_{i+1}, y_i)$ . On note  $S_d^+(L)$  l'ensemble des éléments  $L(m_i) \cap L(m_{i+1})$  ( $i = 1, 2, \dots, p - 1$ ). On les appellera dans la suite points saillants supérieurs droits de  $L$ .

**Exemple 3.11**

Sur la figure 3.9 ci-dessous, les points  $S_g^-(L) = \tau$  de la ligne saillante  $L$  sont les quatre points marqués d'un cercle, les points  $S_d^+(L)$  sont les trois points marqués d'une croix.



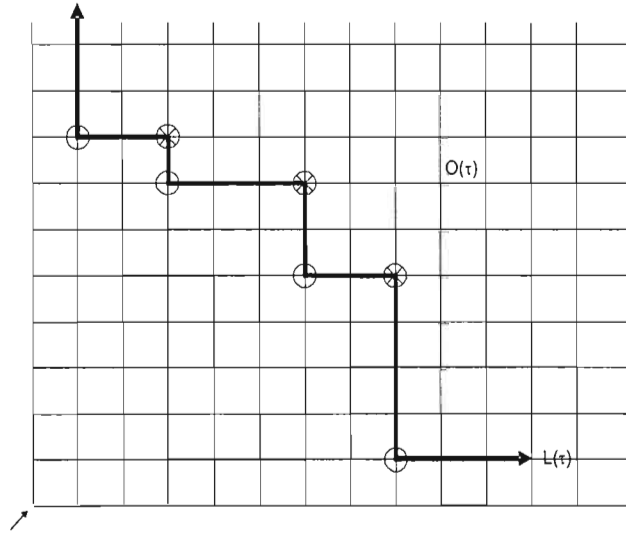


Figure 3.9 Les ensembles  $S_g^-(L)$  et  $S_d^+(L)$ .

### Lemme 3.12

Soit  $\tau$  une quasi-permutation de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Alors il existe un et un seul ensemble de lignes saillantes (inférieures gauches)  $\{L_1, \dots, L_k\}$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  tel que :

(i) les lignes  $L_1, \dots, L_k$  sont deux à deux disjointes,

(ii)  $\bigcup_{i=1}^k S_g^-(L_i) = \tau$ .

### Preuve

Soit  $\tau = \tau_1 \supseteq \tau_2 \supseteq \dots \supseteq \tau_k \supseteq \tau_{k+1} = \emptyset$ ,  $\tau_k \neq \emptyset$ , la suite de quasi-permutations définies par la condition :

$$\tau_{i+1} = \tau_i \setminus S_g^-(\tau_i) \text{ pour tout } i = 1, \dots, k.$$

Posons  $L_i = L(\tau_i)$  pour  $i = 1, \dots, k$ . La relation  $\tau_{i+1} = \tau_i \setminus S_g^-(\tau_i)$  montre que les lignes saillantes  $L_1, \dots, L_k$  vérifient la condition (ii) du lemme 3.12. En effet, comme  $\tau = \tau_1 \supseteq \tau_2 \supseteq \dots \supseteq \tau_k$ , alors  $\bigcup_{i=1}^k (\tau_i \setminus \tau_{i+1}) = \tau$  et donc

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^k S_g^-(L_i) &= \bigcup_{i=1}^k S_g^-(\tau_i) \\ &= \bigcup_{i=1}^k (\tau_i \setminus \tau_{i+1}) \\ &= \tau. \end{aligned}$$

La condition (i) est une simple conséquence du fait que  $\tau$  est une quasi-permutation et de la remarque :

$$P' \subseteq P \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \Rightarrow L(P') \subseteq O(P).$$

Plus précisément,

$$L_i \cap L_j = \emptyset \text{ pour tous } i, j \text{ avec } i \neq j,$$

car si on suppose le contraire, i.e.  $L_i \cap L_j \neq \emptyset$  pour certains  $i, j$  avec  $i < j$ , alors on aboutit à une contradiction. En effet, soit  $(x, y) \in L_i \cap L_j$ . Comme  $i < i + 1 \leq j$ , alors  $\tau_j \subseteq \tau_{i+1} \subseteq \tau_i$  et donc  $L_j = L(\tau_j) \subseteq O(\tau_{i+1}) = O(\tau_i \setminus S_g^-(\tau_i))$ . Ainsi,  $(x, y) \in L_i = L(\tau_i)$  et  $(x, y) \in L(\tau_j) \subseteq O(\tau_i \setminus S_g^-(\tau_i))$ , ce qui donne une contradiction car

$$L(\tau_i) \cap O(\tau_i \setminus S_g^-(\tau_i)) = \emptyset.$$

Réciproquement, soient  $L'_1, \dots, L'_k$ , des lignes saillantes vérifiant les conditions (i) et (ii) du lemme 3.12. L'ensemble de ces lignes saillantes est unique car d'après la condition (i), il existe une et une seule ligne saillante  $L'_i$  telle que les autres soient contenues dans son ombre. Les points de  $S_g^-(L'_i)$  sont alors nécessairement les points saillants de  $\tau$ . Par récurrence, on démontre ainsi l'unicité des lignes saillantes  $L'_1, \dots, L'_k$ . En effet, en écartant la ligne saillante  $L'_i$ , on obtient que parmi les lignes saillantes restantes  $L'_1, \dots, L'_{i-1}, L'_{i+1}, \dots, L'_k$ , il existe aussi une et une seule ligne saillante  $L'_j$  telle que les autres soient contenues dans son ombre. En continuant ainsi on obtient que l'ensemble des lignes saillantes  $\{L'_1, \dots, L'_k\}$  est unique.

### Définition 3.13

Les lignes saillantes  $L_1, \dots, L_k$  définies en les conditions (i) et (ii) du lemme 3.12 sont appelées les lignes saillantes de  $\tau$ . On pose  $\mathcal{L}(\tau) = \{L_1, \dots, L_k\}$ .

### Exemple 3.14

La figure 3.10 ci-dessous représente les lignes saillantes associées à la permutation  $\sigma = 3641725$ , i.e. les lignes saillantes de  $\hat{\sigma}$ .

### Remarque 3.15

Il existe une relation d'ordre naturel sur les lignes saillantes définie par :

$$L \leq L' \text{ si et seulement si } L' \subseteq O(L).$$

Sur la figure 3.10 ci-dessus  $L_1 \leq L_2 \leq L_3$ .

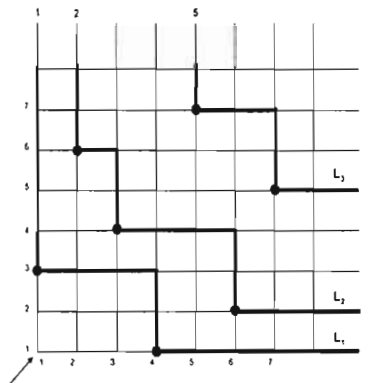


Figure 3.10 Les lignes saillantes associées à la permutation  $\sigma = 3641725$ .

### Remarque 3.16

Soit  $\tau$  une quasi-permutation de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Alors la première ligne saillante  $L_1$  est la frontière de  $O(\tau)$ , i.e.  $L_1$  est la frontière de la réunion des ombres des points de  $\tau$ . Pour former  $L_2$ , la seconde ligne saillante de  $\tau$ , on supprime les points de  $\tau$  qui appartiennent à  $L_1$  et on répète la procédure précédente, i.e. on forme  $\tau \setminus L_1$  et on considère  $L_2$  comme la frontière de  $O(\tau \setminus L_1)$ , i.e.  $L_2$  est la frontière de la réunion des ombres des points de  $\tau \setminus L_1$ . Pour former  $L_3$ , la troisième ligne saillante de  $\tau$ , on supprime les points de  $\tau$  qui appartiennent à  $L_1 \cup L_2$  et on répète la procédure précédente, i.e. on forme  $\tau \setminus (L_1 \cup L_2)$  et on considère  $L_3$  comme la frontière de  $O(\tau \setminus (L_1 \cup L_2))$ , i.e.  $L_3$  est la frontière de la réunion des ombres des points de  $\tau \setminus (L_1 \cup L_2)$ . En général si  $L_1, L_2, \dots$  sont les lignes saillantes de  $\tau$ , alors en supposant que  $L_1, \dots, L_{i-1}$  sont construits, on obtient  $L_i$  comme la frontière de  $O(\tau \setminus (L_1 \cup \dots \cup L_{i-1}))$ .

### Définition 3.17

On appelle *squelette* de la quasi-permutation  $\tau$  la partie  $Sq(\tau)$  de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  définie par :

$$Sq(\tau) = \bigcup_{i=1}^k S_d^+(L_i)$$

où  $L_1, \dots, L_k$  sont les lignes saillantes de  $\tau$ .

Il y aurait en fait quatre notions de squelette, correspondant aux quatre éclairages possibles du plan. La définition précédente est celle du squelette inférieur gauche  $Sq_g^-(\tau)$ .

Le squelette d'une quasi-permutation  $\tau$  est encore une quasi-permutation dont le cardinal est celui de  $\tau$  diminué du nombre de lignes saillantes de  $\tau$ . En effet, ce résultat est une conséquence

directe du fait que si une ligne saillante de  $\tau$  contient  $p$  points de  $\tau$ , alors elle contient forcément  $(p - 1)$  points de  $Sq(\tau)$  et du fait que chaque point de  $\tau$  appartient à une ligne saillante de  $\tau$ .

**Exemple 3.18**

La permutation  $\sigma = 3641725$  de  $\mathcal{S}_7$  a pour squelette la quasi-permutation de  $[n]$  notée  $Sq_g^-(\sigma) = 0063047$  et représentée par les croix de la figure 3.11.

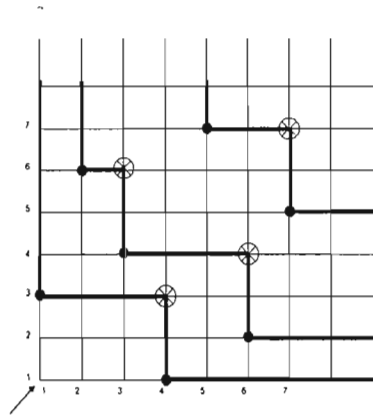


Figure 3.11  $Sq_g^-(\sigma) = 0063047$ .

Le squelette supérieur droit de  $\sigma$  est la quasi-permutation de  $[n]$  notée  $Sq_d^+(\sigma) = 1420500$  et représentée par les croix de la figure 3.12.

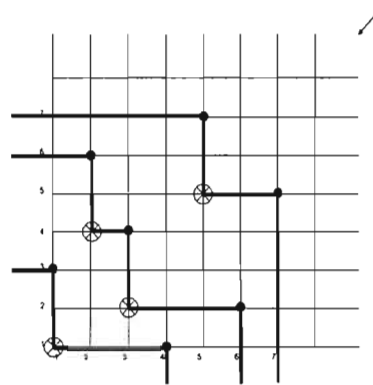


Figure 3.12  $Sq_d^+(\sigma) = 1420500$ .

Le squelette supérieur gauche de  $\sigma$  est la quasi-permutation de  $[n]$  notée  $Sq_g^+(\sigma) = 0300614$  et

représentée par les croix de la figure 3.13.

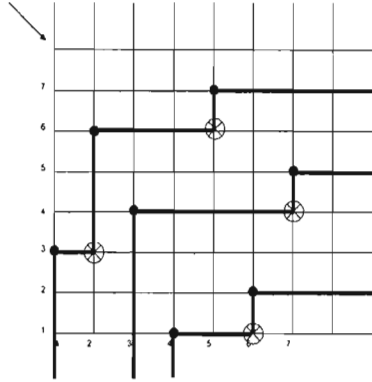


Figure 3.13  $Sq_g^+(\sigma) = 0300614$ .

Le squelette inférieur droit de  $\sigma$  est la quasi-permutation de  $[n]$  notée  $Sq_d^-(\sigma) = 4072050$  et représentée par les croix de la figure 3.14.

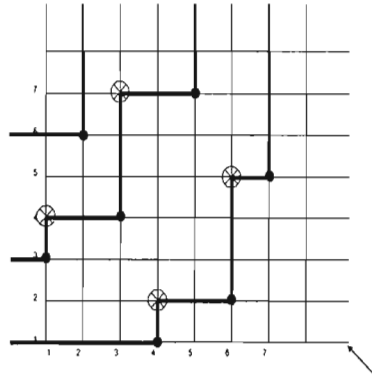


Figure 3.14  $Sq_d^-(\sigma) = 4072050$ .

### Proposition 3.19

*Une quasi-permutation  $\tau$  de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  est caractérisée par son squelette et son support.*

### Preuve

Soit  $\tau$  une quasi-permutation de support  $\text{Supp}(\tau) = X \times Y$  et de squelette (inférieur gauche)  $Sq(\tau) \subseteq \text{Supp}(\tau)$ . Soient  $V_1, \dots, V_k$  les droites verticales passant par un point de  $X$  et ne contenant aucun point de  $Sq(\tau)$  et soient  $H_1, \dots, H_k$  les droites horizontales passant par un point de

$Y$  et ne contenant aucun point de  $Sq(\tau)$ . On peut remarquer facilement que  $k$  est le cardinal de  $\tau$  diminué de celui de  $Sq(\tau)$  et ceci implique que  $k$  est le nombre de lignes saillantes de  $\tau$ .

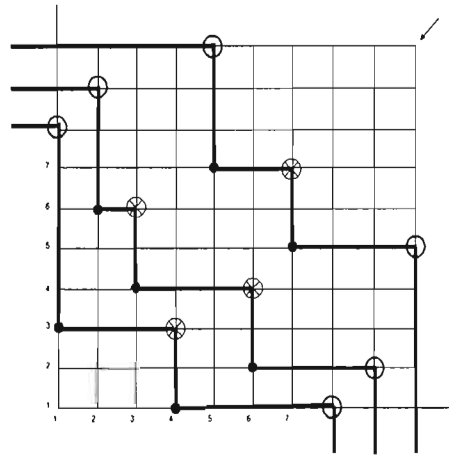
Soient  $x_1, \dots, x_k$  des points situés sur  $V_1, \dots, V_k$  formant une chaîne pour l'ordre naturel du plan et dont les ordonnées sont toutes strictement supérieures à celles des points de  $Sq(\tau)$ . Soient  $y_1, \dots, y_k$  des points situés sur  $H_1, \dots, H_k$  formant une chaîne pour l'ordre naturel du plan et dont les abscisses sont toutes strictement supérieures à celles des points de  $Sq(\tau)$ .

On peut vérifier d'une manière géométrique évidente que  $Sq(\tau) \cup \{x_1, \dots, x_k\} \cup \{y_1, \dots, y_k\}$  est une quasi-permutation et que

$$\tau = Sq_d^+(Sq(\tau) \cup \{x_1, \dots, x_k\} \cup \{y_1, \dots, y_k\}). \quad (3.2)$$

### Exemple 3.20

La figure 3.15 ci-dessous exprime géométriquement la relation (3.2) pour la permutation  $\sigma = 3641725$ .



**Figure 3.15**  $\sigma = Sq_d^+(Sq(\sigma) \cup \{x_1, \dots, x_k\} \cup \{y_1, \dots, y_k\})$ .

La proposition précédente exprime en somme que l'application

$$\sigma \longmapsto Sq(\sigma)$$

est une injection de  $\mathcal{S}_n$  dans les quasi-permutations de  $[n]$ .

### 3.2 Squelette et correspondance de Robinson-Schensted

Dans notre exemple 3.14, il y a trois lignes saillantes et leurs  $x$ -coordonnées et leurs  $y$ -coordonnées sont illustrées en haut et à droite du diagramme de la figure 3.10 ci-dessus. En comparant ces coordonnées avec les premières lignes des tableaux

$$P(\sigma) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & & \\ \hline 3 & 4 & 7 \\ \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline \end{array} \text{ et } Q(\sigma) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & & \\ \hline 3 & 6 & 7 \\ \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline \end{array},$$

calculés au chapitre 2 à la page 10, on peut remarquer que

$$P_{1j} = y_{L_j} \text{ et } Q_{1j} = x_{L_j}.$$

En fait, les points de  $\hat{\sigma}$  sur la ligne  $L_j$  sont précisément les éléments qui passent par la case  $(1, j)$  durant la construction de  $P(\sigma)$  comme le montre le résultat suivant :

#### Lemme 3.21

Soit  $\sigma = x_1 x_2 \dots x_n$  une permutation et soit  $\{L_1, \dots, L_p\}$  l'ensemble de ses lignes saillantes. Supposons que la ligne verticale  $x = k$  rencontre  $i$  lignes de ces lignes saillantes. Soit  $y_j$  l'ordonnée, la plus petite, d'un point d'intersection de la ligne verticale  $x = k$  avec la ligne saillante  $L_j$ . Alors la première ligne du tableau  $P_k = (\dots ((x_1 \leftarrow x_2) \leftarrow x_3) \dots \leftarrow x_k)$  est

$$R_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline y_1 & y_2 & \dots & y_i \\ \hline \end{array} \quad (3.3)$$

#### Preuve

Par induction sur  $k$ , le lemme 3.21 est trivial pour  $k = 0$  car d'une part la ligne verticale  $x = 0$  ne rencontre aucune ligne saillante et d'autre part on a  $P_0 = \emptyset$ . Supposons que le résultat est vérifié pour la ligne  $x = k$  et considérons  $x = k + 1$ . On peut distinguer les deux cas suivants :

- Si

$$x_{k+1} > y_i, \quad (3.4)$$

alors le point  $(k + 1, x_{k+1})$  appartient à une nouvelle ligne saillante. Ainsi chacune des valeurs  $y_1, \dots, y_i$  reste inchangée et on obtient une nouvelle intersection  $y_{i+1} = x_{k+1}$ . Mais, par (3.3) et (3.4), ceci va causer l'ajout de  $x_{k+1}$  à la fin de la première ligne de  $P_k$  sans déplacer aucun autre élément. Donc la première ligne du tableau  $P_{k+1} = P_k \leftarrow x_{k+1}$  est

$$R_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline y_1 & y_2 & \dots & y_i & y_{i+1} \\ \hline \end{array},$$

ce qui implique que le lemme 3.21 est vérifié. Par exemple, pour la permutation  $\sigma = 3641725$  dont  $\{L_1, L_2, L_3\}$  est l'ensemble de ses lignes saillantes (voir la figure 3.10 ci-dessus). Prenons  $k = 4$ , alors la ligne verticale  $x = 4$  rencontre les lignes saillantes  $L_1$  et  $L_2$  de sorte que  $y_1 = 1$  et  $y_2 = 4$ . Comme  $x_{k+1} = x_5 = 7 > 4 = y_2$ , alors le point  $(5, x_5) = (5, 7)$  appartient à la nouvelle ligne saillante  $L_3$ . Ainsi chacune des valeurs  $y_1, y_2$  reste inchangée et on obtient une nouvelle intersection  $y_3 = x_5 = 7$ . Remarquons que la première ligne du tableau  $P_4$  est 

1	4
---	---

 et que la première ligne du tableau  $P_5$  est 

1	4	7
---	---	---

 (voir exemple 2.5, chapitre 2, page 10).

• Si

$$y_1 < \dots < y_{j-1} < x_{k+1} < y_j < \dots < y_i, \quad (3.5)$$

alors le point  $(k+1, x_{k+1})$  va être ajouté à la ligne  $L_j$ . Ainsi, l'ordonnée, la plus petite, d'un point d'intersection de la ligne verticale  $x = k+1$  avec la ligne saillante  $L_j$  est  $y'_j = x_{k+1}$  et toutes les autres valeurs  $y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_i$  restent inchangées. De plus, les équations (3.3) et (3.5) assurent que la première ligne du tableau  $P_{k+1} = P_k \leftarrow x_{k+1}$  est

$$R_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline y_1 & \dots & y_{j-1} & y'_j & y_{j+1} & \dots & y_i \\ \hline \end{array}.$$

Par conséquent le lemme 3.21 est vérifié. Par exemple, toujours pour la permutation  $\sigma = 3641725$ . Prenons  $k = 5$ , alors la ligne verticale  $x = 5$  rencontre les lignes saillantes  $L_1, L_2$  et  $L_3$  de sorte que  $y_1 = 1, y_2 = 4$  et  $y_3 = 7$ . Comme  $y_1 = 1 < x_{k+1} = x_6 = 2 < y_2 = 4 < y_3 = 7$ , alors le point  $(6, x_6) = (6, 2)$  va être ajouté à la ligne  $L_2$ . Ainsi, l'ordonnée, la plus petite, d'un point d'intersection de la ligne verticale  $x = 6$  avec la ligne saillante  $L_2$  est  $y'_2 = x_6 = 2$  et les autres valeurs  $y_1, y_3$  restent inchangées. Remarquons que la première ligne du tableau  $P_5$  est 

1	4	7
---	---	---

 et que la première ligne du tableau  $P_6$  est 

1	2	7
---	---	---

 (voir exemple 2.5, chapitre 2, page 10).

Il s'ensuit de la preuve de ce lemme qu'on peut déduire toutes les étapes de construction de la première ligne du tableau  $P(\sigma)$  en lisant les lignes saillantes de  $\sigma$  de la gauche vers la droite. En effet, à l'étape  $k$ , la ligne verticale  $x = k$  rencontre une seule ligne saillante en une demi-droite verticale ou en un segment vertical et rencontre le reste des lignes saillantes en un point. En termes de la première ligne du tableau  $P_k$ , une demi-droite verticale correspond à l'ajout d'un élément à la fin de la première ligne et un segment vertical correspond au déplacement d'un élément de la première ligne et les points correspondent aux éléments qui restent inchangés.



### Corollaire 3.22

Si la correspondance de Robinson-Schensted associe la paire de tableaux  $(P, Q)$  à la permutation  $\sigma$  et si  $\{L_1, \dots, L_k\}$  est l'ensemble des lignes saillantes de  $\sigma$ , alors pour tout  $1 \leq i \leq k$ , on a :

$$P_{1i} = y_{L_i} \text{ et } Q_{1i} = x_{L_i}.$$

### Preuve

Comme  $P = P_n$ , l'énoncé pour  $P$  est juste le cas  $k = n$  du lemme 3.21. D'après le raisonnement ci-haut dans la preuve du lemme 3.21, on peut remarquer qu'une case est ajoutée à la première ligne de  $P_{k-1}$  seulement si  $x_k > y_{i-1}$  et dans ce cas une entrée  $k$  est ajoutée à la première ligne de  $Q_{k-1}$  dans la case  $(1, i)$ . Comme le point  $(k, x_k)$  appartient à une nouvelle ligne saillante  $L_i$ , alors la ligne verticale  $x = k$  rencontre  $L_i$  en une demi-droite verticale, i.e.  $x_{L_i} = k$ . Ainsi

$$x_{L_i} = k = Q_{1i},$$

ce qui termine la preuve de ce corollaire.

Maintenant nous allons voir comment trouver le reste de  $P(\sigma)$  et de  $Q(\sigma)$  à partir de cette construction géométrique. Considérons les points marqués d'une croix  $\otimes$  sur la figure 3.11. Si un tel point a les coordonnées  $(k, x')$  alors par la preuve du lemme 3.21,  $x'$  doit être déplacé de la première ligne de  $P_{k-1}$  par l'insertion de  $x_k$ . Ainsi les points  $\otimes$  correspondent aux éléments insérés dans la deuxième ligne de  $P$ . Donc, on peut trouver le reste de  $P(\sigma)$  et de  $Q(\sigma)$  en itérant la construction géométrique précédente. Dans notre exemple 3.17, la deuxième ligne et la troisième ligne de  $P(\sigma)$  et celles de  $Q(\sigma)$  peuvent se déduire des lignes saillantes continues et pointillées respectivement du diagramme suivant sur la figure 3.16 ci-dessous.

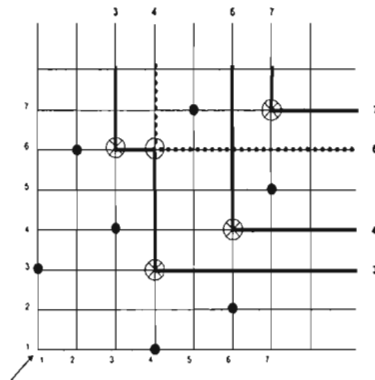


Figure 3.16 Les lignes saillantes associées à  $Sq(\sigma)$  et à  $Sq^2(\sigma)$  où  $\sigma = 3641725$ .

Formellement, on a la définition suivante :

### Définition 3.23

Soit  $\sigma$  une quasi-permutation de  $[n]$ . Nous définissons par récurrence les squelettes successifs de  $\sigma$  comme les quasi-permutations suivantes :

$$Sq^0(\sigma) = \hat{\sigma} \text{ et pour } k \geq 0 : Sq^{k+1}(\sigma) = Sq(Sq^k(\sigma)),$$

et nous notons

$$Sq^*(\sigma) = \bigcup_{k \geq 0} Sq^k(\sigma). \quad (3.6)$$

Le cardinal des squelettes successifs diminue strictement, et à partir d'un certain rang les termes de (3.6) deviennent vides. Les termes non vides forment alors une partition de  $Sq^*(\sigma)$ .

### Remarque 3.24

On peut déduire de la proposition 3.19 qu'une quasi-permutation  $\tau$  de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  est caractérisée par les supports des squelettes successifs  $\{Sq^k(\tau) \mid k \geq 0\}$ . En effet, ce résultat est obtenu directement en itérant la proposition 3.19. Plus précisément, d'après cette proposition,  $\tau$  est caractérisée par  $Sq(\tau)$  et  $\text{Supp}(Sq^0(\tau))$ . Mais, toujours d'après la même proposition,  $Sq(\tau)$ , vu comme une quasi-permutation, est aussi caractérisé par  $Sq^2(\tau)$  et  $\text{Supp}(Sq^1(\tau))$ . En continuant, on obtient que pour tout  $k \geq 1$ ,  $Sq^k(\tau)$  est caractérisé par  $Sq^{k+1}(\tau)$  et  $\text{Supp}(Sq^k(\tau))$ . Comme le cardinal des squelettes successifs diminue strictement et à partir d'un certain rang  $p$  les termes  $Sq^k(\tau)$  deviennent vides pour  $k \geq p$ . Donc  $\tau$  est caractérisée par

$$\text{Supp}(Sq^0(\tau)), \text{Supp}(Sq^1(\tau)), \dots, \text{Supp}(Sq^{p-1}(\tau)),$$

i.e.  $\tau$  est caractérisée par les supports des squelettes successifs  $\{Sq^k(\tau) \mid k \geq 0\}$ .

Comme  $Sq^k(\sigma)$  est une quasi-permutation, on va noter les lignes saillantes de  $Sq^k(\sigma)$  par  $L_j^k$ . Ainsi, on peut donner le théorème suivant qui montre que l'algorithme de Robinson-Schensted revient à prendre les squelettes itérés de la permutation  $\sigma$ .

### Théorème 3.25

Supposons que la correspondance de Robinson-Schensted associe la paire  $(P, Q)$  à la permutation  $\sigma$ . Si cette correspondance associe la paire  $(P^{(k)}, Q^{(k)})$  à la quasi-permutation  $Sq^k(\sigma)$ , alors

$P^{(k)}$  (resp.  $Q^{(k)}$ ) est un tableau standard constitué de la ligne  $k + 1$  du tableau  $P$  (resp.  $Q$ ) et des lignes de  $P$  (resp.  $Q$ ) qui sont au-dessus de cette ligne. De plus

$$P_{kj} = y_{L_j^k} \text{ et } Q_{kj} = x_{L_j^k} \text{ pour tous } k, j.$$

Ce théorème généralise le corollaire 3.22 et il représente un résultat qu'on obtient en faisant une application itérée du lemme 3.21 aux squelettes successifs de  $\sigma$ . En effet, les points de la quasipermutation  $Sq^k(\sigma)$  correspondent aux éléments de la première ligne de  $P^{(k)}$  et aux éléments de la  $(k + 1)$ -ème ligne de  $P$ , i.e. la première ligne de  $P^{(k)}$  est identique à la  $(k + 1)$ -ème ligne de  $P$ . De même, les points de  $Sq^{k+1}(\sigma)$  correspondent aux éléments de la première ligne de  $P^{(k+1)}$  et aux éléments de la deuxième ligne de  $P^{(k)}$  et aux éléments de la  $(k + 2)$ -ème ligne de  $P$ . Donc la deuxième ligne de  $P^{(k)}$  est identique à la  $(k + 2)$ -ème ligne de  $P$ . En continuant ainsi, on peut remarquer facilement que le tableau  $P^{(k)}$  est constitué de la  $(k + 1)$ -ème ligne de  $P$  et des lignes de  $P$  qui sont au-dessus de celle-ci. Par exemple si  $\sigma = 3641725$ , alors  $Sq(\sigma) = 0063047$ ,  $Sq^2(\sigma) = 0006000$  et pour tout  $k \geq 3$ ,  $Sq^k(\sigma) = 0000000$ . On peut voir facilement que

$$P = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & & \\ \hline 3 & 4 & 7 \\ \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline \end{array} \text{ et } Q = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & & \\ \hline 3 & 6 & 7 \\ \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline \end{array}.$$

On a

$$\begin{aligned} Sq(\sigma) &= 0063047 \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 7 \\ 6 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$P^{(1)} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & & \\ \hline 3 & 4 & 7 \\ \hline \end{array} \text{ et } Q^{(1)} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & & \\ \hline 3 & 6 & 7 \\ \hline \end{array}.$$

On a

$$\begin{aligned} Sq^2(\sigma) &= 0006000 \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$P^{(2)} = \begin{array}{|c|} \hline 6 \\ \hline \end{array} \text{ et } Q^{(2)} = \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array}.$$

Pour tout  $k \geq 3$ , on a

$$Sq^k(\sigma) = 0000000,$$

ce qui implique que

$$P^{(k)} = \emptyset \text{ et } Q^{(k)} = \emptyset \text{ pour tout } k \geq 3.$$

Maintenant, on peut montrer le théorème suivant dû à Schützenberger.

### **Théorème 3.26**

*Si  $\sigma \in S_n$ , alors*

$$P(\sigma^{-1}) = Q(\sigma) \text{ et } Q(\sigma^{-1}) = P(\sigma).$$

### **Preuve**

Le passage  $\sigma \longrightarrow \sigma^{-1}$  revient simplement à échanger le rôle des lignes et des colonnes de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Ainsi, le diagramme qui illustre les lignes saillantes des squelettes successifs de  $\sigma^{-1}$  est symétrique par rapport à la droite  $y = x$  au diagramme qui illustre les lignes saillantes des squelettes successifs de  $\sigma$ .

## **3.3 Correspondance de Viennot**

Viennot a introduit un algorithme permettant d'associer d'une manière bijective à toute permutation  $\sigma$  une paire  $(\alpha, \beta)$  de mots de Yamanouchi qui sont réarrangements l'un de l'autre. Pour le voir, donnons la notion préliminaire suivante :

### **Définition 3.27**

*Un mot de Yamanouchi est un mot  $w = x_1 \dots x_n$  dont les lettres  $x_i$  sont des entiers  $\geq 0$  et tel que quels que soient les entiers  $i$  et  $k$  de  $[n]$ , la lettre  $k$  apparaît au moins autant de fois que la lettre  $k + 1$  dans le mot  $x_1 \dots x_i$ .*

Nous notons  $Y_n^0$  l'ensemble des mots de Yamanouchi de longueur  $n$ , et  $Y_n$  ceux de  $Y_n^0$  ne contenant pas la lettre 0.

La notion de mot de Yamanouchi est un certain codage des tableaux de Young standards. Soit

$$\varphi_n : \mathcal{D}_n^0 \longrightarrow Y_n^0$$

définie par la condition suivante :

soit  $T = \{T_{ij} \mid 1 \leq i \leq q, 1 \leq j \leq \lambda_i\}$  un tableau standard dont les entrées sont des entiers distincts  $\leq n$  ; on définit  $\varphi_n(T) = w_1 w_2 \dots w_n$  par :

$$w_i = \begin{cases} 0, & \text{si } i \text{ n'apparaît pas dans } T, \\ \text{le numéro de la ligne où est placé } i, & \text{sinon} \end{cases}$$

### Exemple 3.28

Si  $P$  est le tableau

11			
4	8		
2	5	7	9

Alors

$$\varphi_{12}(P) = 010210121030.$$

On vérifie aisément le lemme suivant :

### Lemme 3.29

*L'application  $\varphi_n$  est une bijection entre  $\mathfrak{D}_n^0$  et  $Y_n^0$ . De plus, la restriction de  $\varphi_n$  à  $\mathfrak{D}_n$  réalise une bijection entre  $\mathfrak{D}_n$  et  $Y_n$ .*

### Preuve

L'application  $\varphi_n$  est injective. En effet, si  $T_1, T_2 \in \mathfrak{D}_n^0$  sont deux tableaux tels que

$$\varphi_n(T_1) = \varphi_n(T_2) = w$$

où  $w = w_1 \dots w_n \in Y_n^0$ , alors pour un certain  $1 \leq i \leq n$ , on peut distinguer les deux cas suivants :

- si  $w_i = 0$ , alors  $i$  n'apparaît ni dans  $T_1$  ni dans  $T_2$ ,
- si  $w_i = k \neq 0$ , alors  $i$  apparaît à la fois dans  $T_1$  et dans  $T_2$ , de plus  $i$  apparaît dans la  $k$ -ème ligne de  $T_1$  et aussi dans la  $k$ -ème ligne de  $T_2$ .

Donc  $T_1$  et  $T_2$  ont les mêmes entrées de telle sorte que pour tout  $k$ , la  $k$ -ème ligne de  $T_1$  a les mêmes éléments que la  $k$ -ème ligne de  $T_2$ . Comme les tableaux  $T_1$  et  $T_2$  sont standards alors ces éléments sont en croissance stricte ainsi les lignes de  $T_1$  sont les mêmes que les lignes de  $T_2$ . Par conséquent,  $T_1 = T_2$ , ce qui implique que l'application  $\varphi_n$  est injective.

L'application  $\varphi_n$  est surjective. En effet, il s'agit de montrer que pour tout  $w = w_1 \dots w_n \in Y_n^0$ , il existe  $T \in \mathcal{D}_n^0$  tel que  $\varphi_n(T) = w$ . Si  $w = 0 \dots 0$ , alors  $T$  est le tableau vide. Si  $w \neq 0 \dots 0$ , alors soit  $k$  le plus grand nombre parmi les lettres de  $w$ , i.e.  $k$  est le plus grand nombre pour lequel il existe  $1 \leq i \leq n$  tel que  $w_i = k$ . D'après la définition d'un mot de Yamanouchi, l'ensemble des lettres de  $w$  est un sous-ensemble de l'ensemble  $\{0, 1, \dots, n\}$ . Soit  $w' = w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_q}$  le mot de Yamanouchi obtenu de  $w$  en supprimant les lettres égales à zéro. L'ensemble des lettres de  $w'$  est  $\{1, 2, \dots, k\}$ . Définissons le tableau  $T = \{T(i, j)\}$  comme suit :

$$T(i, j) = i_r,$$

où  $w_{i_r}$  est la  $j$ -ème lettre de  $w'$  égale à  $i$  en allant de la gauche vers la droite.

Vérifions que  $T \in \mathcal{D}_n^0$ . Comme  $1 \leq i_r \leq n$ , alors les entrées de  $T$  sont des nombres  $\leq n$ . On peut remarquer facilement que le nombre d'éléments de la ligne  $i$  de  $T$  est exactement le nombre des lettres de  $w'$  égales à  $i$ . Comme la lettre  $i$  apparaît autant de fois que la lettre  $(i + 1)$  dans  $w'$ , alors le nombre d'éléments de la ligne  $i$  est supérieur ou égal au nombre d'éléments de la ligne  $(i + 1)$ , i.e. en représentant le tableau  $T$  par un diagramme, on voit qu'une ligne ne peut pas être plus longue que la ligne située au-dessous d'elle et ceci implique que le diagramme est de Ferrers. Ainsi, pour montrer que  $T \in \mathcal{D}_n^0$ , il suffit seulement de montrer que les valeurs sont strictement croissantes sur chaque ligne en allant de la gauche vers la droite et strictement croissantes sur chaque colonne en allant du bas vers le haut.

Comme  $T(i, j) = i_r$  avec  $w_{i_r}$  la  $j$ -ème lettre de  $w'$  égale à  $i$  en allant de la gauche vers la droite et  $T(i + 1, j) = i_s$  avec  $w_{i_s}$  la  $j$ -ème lettre de  $w'$  égale à  $i + 1$  en allant de la gauche vers la droite et comme  $w'$  est un mot de Yamanouchi, alors  $i_r \leq i_s$ , ce qui implique que les nombres dans chaque colonne de  $T$  forment une suite strictement croissante.

Comme  $T(i, j) = i_r$  avec  $w_{i_r}$  la  $j$ -ème lettre de  $w'$  égale à  $i$  en allant de la gauche vers la droite et  $T(i, j + 1) = i_s$  avec  $w_{i_s}$  la  $(j + 1)$ -ème lettre de  $w'$  égale à  $i$  en allant de la gauche vers la droite, alors  $i_r \leq i_s$ , ce qui implique que les nombres dans chaque ligne de  $T$  forment une suite strictement croissante.

Par conséquent,  $T \in \mathcal{D}_n^0$ . Vérifions maintenant que  $\varphi_n(T) = w$ . En effet, il suffit de remarquer que les  $i$  pour lesquels  $w_i = 0$  n'apparaissent pas dans  $T$  et que si  $w_{i_r} = i$ , alors  $i$  est le nombre de la ligne où est placé  $i_r$  dans  $T$ .

Remarquons que si  $w = w_1 \dots w_n \in Y_n$ , alors  $w = w'$  et donc les entrées de  $T$  sont exactement

les nombres  $1, 2, \dots, n$ , i.e.  $T \in \mathfrak{D}_n$ . Remarquons aussi que si  $T \in \mathfrak{D}_n$ , alors chaque  $1 \leq i \leq n$  apparaît dans  $T$  et donc d'après la définition de  $\varphi_n$ , le mot  $w = \varphi_n(T)$  n'a pas de lettre 0, i.e.  $w \in Y_n$ . Par conséquent, la restriction de  $\varphi_n$  à  $D_n$  est une bijection entre  $D_n$  et  $Y_n$ . Ainsi, la preuve de ce lemme est terminée.

À la quasi-permutation  $\sigma$  on associe alors une paire de mots  $(\alpha(\sigma), \beta(\sigma))$  définie par :

$$\alpha(\sigma) = \alpha_1 \cdots \alpha_n \text{ avec } \alpha_i \text{ le nombre de points de } Sq^*(\sigma) \text{ d'ordonnée } i$$

et

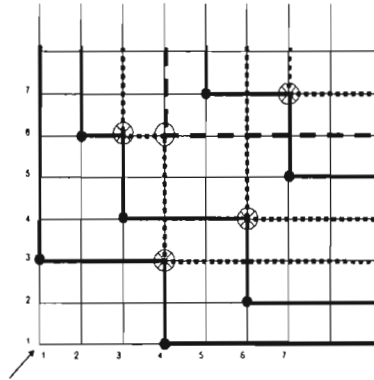
$$\beta(\sigma) = \beta_1 \cdots \beta_n \text{ avec } \beta_i \text{ le nombre de points de } Sq^*(\sigma) \text{ d'abscisse } i.$$

Par exemple, pour la permutation  $\sigma = 3641725$ , les squelettes successifs de  $\sigma$  apparaissent dans la figure 3.17 ci-dessous. Il est clair que

$$\alpha(\sigma) = 1122132$$

et

$$\beta(\sigma) = 1123122.$$



**Figure 3.17** Les lignes saillantes associées à  $\{Sq^k(\sigma) \mid k \geq 0\}$  où  $\sigma = 3641725$ .

### Proposition 3.30

*Sous les hypothèses précédentes, il existe  $i \in [n]$  tel que  $\alpha_i = k$  (resp.  $\beta_i = k$ ) si et seulement s'il existe une ligne saillante  $L^{k-1}$  de  $Sq^{k-1}(\sigma)$  telle que  $y_{L^{k-1}} = i$  (resp.  $x_{L^{k-1}} = i$ ).*

### Preuve

Si  $\alpha_i = k$  (resp.  $\beta_i = k$ ) pour un certain  $1 \leq i \leq k$ , alors la ligne horizontale  $y = i$  (resp. verticale  $x = i$ ) rencontre  $Sq^*(\sigma)$  en  $k$  points de sorte qu'elle rencontre chaque  $Sq^p(\sigma)$  en un seul point et ceci pour tout  $0 \leq p \leq k-1$ . Parmi ces  $k$  points, le point situé complètement à droite (resp. en haut), i.e. le point qui a l'abscisse (resp. l'ordonnée) maximale est celui qui appartient à  $Sq^{k-1}(\sigma)$  et comme il n'y a pas de point de  $Sq^k(\sigma)$  d'ordonnée (resp. l'abscisse)  $i$ , alors ce point de  $Sq^{k-1}(\sigma)$  est le début d'une demi-droite horizontale (resp. verticale) d'une ligne saillante  $L^{k-1}$  de  $Sq^{k-1}(\sigma)$ , ce qui implique que  $y_{L^{k-1}} = i$  (resp.  $x_{L^{k-1}} = i$ ).

Réciproquement, s'il existe une ligne saillante  $L^{k-1}$  de  $Sq^{k-1}(\sigma)$  telle que  $y_{L^{k-1}} = i$  (resp.  $x_{L^{k-1}} = i$ ), alors la demi-droite horizontale (resp. verticale) de  $L^{k-1}$  est contenue dans la droite horizontale  $y = i$  (resp. verticale  $x = i$ ). Ainsi,  $y = i$  (resp.  $x = i$ ) ne contient aucun point de  $Sq^p(\sigma)$  pour tout  $p \geq k$  et pour tout  $0 \leq p \leq k-1$ , la droite  $y = i$  (resp.  $x = i$ ) contient un seul point de  $Sq^p(\sigma)$ . Donc  $y = i$  (resp.  $x = i$ ) rencontre  $Sq^*(\sigma)$  en  $k$  points, ce qui implique que  $\alpha_i$  (resp.  $\beta_i$ ), le nombre de points de  $Sq^*(\sigma)$  d'ordonnée (resp. d'abscisse)  $i$ , est  $k$ , i.e.,  $\alpha_i = k$  (resp.  $\beta_i = k$ ).

### Remarque 3.31

En étiquetant chaque demi-droite horizontale d'une ligne saillante de  $Sq^p(\sigma)$  par  $(p+1)$  et ceci du bas vers le haut, on obtient le mot  $\alpha(\sigma)$ , voir la figure 3.18.

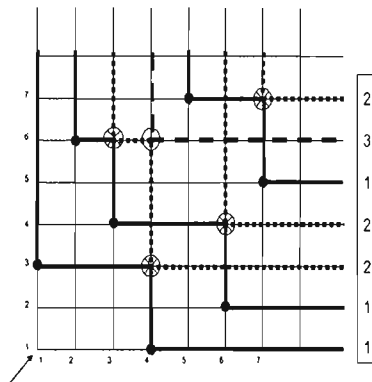
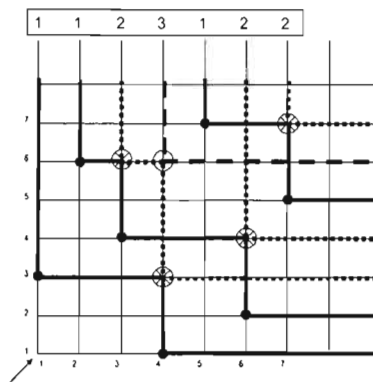


Figure 3.18  $\alpha(\sigma) = 1122132$

En étiquetant chaque demi-droite verticale d'une ligne saillante de  $Sq^p(\sigma)$  par  $(p+1)$  et ceci de la gauche vers la droite, on obtient le mot  $\beta(\sigma)$ , voir la figure 3.19 ci-dessous.



Figure 3.19  $\beta(\sigma) = 1123122$ **Lemme 3.32**

*Sous les hypothèses précédentes, les mots  $\alpha(\sigma)$  et  $\beta(\sigma)$  sont des mots de Yamanouchi.*

**Preuve**

Il suffit de montrer que quels que soient les entiers  $i$  et  $k$  de  $[n]$ , la lettre  $k$  apparaît au moins autant de fois que la lettre  $k+1$  dans le mot  $\alpha_1 \dots \alpha_i$  (resp.  $\beta_1 \dots \beta_i$ ). Mais ceci est évident car chaque ligne saillante  $L$  de  $Sq^k(\sigma)$  s'appuie sur une ligne saillante  $L'$  de  $Sq^{k-1}(\sigma)$ , i.e.  $S_g^-(L) = S_d^+(L')$ . Ainsi le nombre d'occurrences de la lettre  $k+1$  ( $k \geq 0$ ) dans le mot  $\alpha_1 \dots \alpha_i$  (resp.  $\beta_1 \dots \beta_i$ ) est égal au nombre de lignes saillantes  $L$  de  $Sq^k(\sigma)$  telles que  $y_L = j$  (resp.  $x_L = j$ ) avec  $j \leq i$ . Ce nombre est plus petit que le nombre de lignes saillantes  $L$  de  $Sq^k(\sigma)$  telles que  $y_L = j$  (resp.  $x_L = j$ ) avec  $j \leq i$  qui représente le nombre d'occurrences de la lettre  $k$  dans le mot  $\alpha_1 \dots \alpha_i$  (resp.  $\beta_1 \dots \beta_i$ ).

**Exemple 3.33**

Nous reprenons la permutation  $\sigma = 3641725$  des exemples précédents.

La quasi-permutation  $Sq(\sigma)$  (formée par les croix de la figure 3.11 ci-dessus) est la quasi-permutation notée :

$$Sq(\sigma) = 0063047.$$

On construit ensuite les lignes saillantes de  $Sq(\sigma)$  (en pointillé sur la figure 3.17 ci-dessus) et on obtient  $Sq^2(\sigma)$  (noté par un petit cercle sur la figure 3.17)

$$Sq^2(\sigma) = 0006000.$$

Ensuite  $Sq^3(\sigma)$  est vide.

Il vient

$$\alpha(\sigma) = 1122132$$

et

$$\beta(\sigma) = 1123122.$$

Ces deux mots sont des mots de Yamanouchi codant respectivement les deux tableaux de Young

$$P = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & & \\ \hline 3 & 4 & 7 \\ \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline \end{array} \text{ et } Q = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & & \\ \hline 3 & 6 & 7 \\ \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline \end{array}.$$

On peut facilement vérifier que ces deux tableaux sont respectivement les tableaux  $P(\sigma)$  et  $Q(\sigma)$  obtenus par l'algorithme de Robinson-Schensted. En effet, d'après la proposition précédente,  $\alpha_i = k$  (resp  $\beta_i = k$ ) si et seulement s'il existe une ligne saillante  $L^{k-1}$  de  $Sq^{k-1}(\sigma)$  telle que  $y_{L^{k-1}} = i$  (resp  $x_{L^{k-1}} = i$ ) et d'après le théorème 3.25,  $y_{L^{k-1}} = i$  (resp  $x_{L^{k-1}} = i$ ) implique que  $i$  est une entrée de  $P(\sigma)$  (resp  $Q(\sigma)$ ) dans la ligne  $k$ . Comme  $k$  est le numéro de la ligne où est placé  $i$ , alors les tableaux  $P$  et  $Q$  ci-dessus sont tels que

$$P = P(\sigma) \text{ et } Q = Q(\sigma).$$

### Définition 3.34

*Nous dirons que deux mots de Yamanouchi sont réarrangements l'un de l'autre si et seulement si chaque lettre apparaît le même nombre de fois dans chacun d'eux.*

### Remarque 3.35

*Deux mots de Yamanouchi de  $Y_n$  sont réarrangement l'un de l'autre si et seulement si les tableaux correspondants ont même forme.* En effet, d'une part comme, pour tout  $i \geq 1$ , la lettre  $i$  apparaît le même nombre de fois dans chacun des mots de Yamanouchi, alors la  $i$ -ème ligne a la même longueur dans chacun des tableaux correspondants, ce qui implique directement que ces deux tableaux correspondent au même diagramme de Ferrers et donc ils ont la même forme.

D'autre part, si les tableaux correspondants ont la même forme, alors la  $i$ -ème ligne dans chacun d'eux a la même longueur qui est le nombre d'occurrences de la lettre  $i$  dans chacun des mots de Yamanouchi. Ainsi ces deux mots sont réarrangement l'un de l'autre.

### Théorème 3.36

*L'application  $\sigma \mapsto (\alpha(\sigma), \beta(\sigma))$  est une bijection entre le groupe  $S_n$  et les paires de mots de Yamanouchi de  $Y_n$  qui sont réarrangements l'un de l'autre. De plus, cette bijection est identique à celle donnée par l'algorithme de Robinson-Schensted :*

$$\alpha(\sigma) = \varphi_n(P(\sigma)) \text{ et } \beta(\sigma) = \varphi_n(Q(\sigma)).$$

### Preuve

Pour montrer que l'application  $\sigma \mapsto (\alpha(\sigma), \beta(\sigma))$  est une bijection, il suffit de montrer que la paire  $(\alpha(\sigma), \beta(\sigma))$  caractérise la permutation  $\sigma$ , i.e pour toute paire de mots de Yamanouchi de  $Y_n$  qui sont réarrangements l'un de l'autre, il existe une et une seule permutation de  $S_n$  associée à cette paire par cette bijection. En effet, d'après la remarque 3.24, la permutation  $\sigma$  est caractérisée par les supports des squelettes successifs  $\{Sq^k(\sigma) \mid k \geq 0\}$ , ainsi il suffit de montrer que la paire  $(\alpha(\sigma), \beta(\sigma))$  caractérise les supports des squelettes successifs de  $\sigma$ . Notons  $U_k \times V_k$  le support de  $Sq^k(\sigma)$ , ainsi en utilisant la définition de  $\alpha(\sigma)$  et de  $\beta(\sigma)$  et en remarquant que lorsque la  $i$ -ème lettre de  $\alpha(\sigma)$  (resp  $\beta(\sigma)$ ) est strictement supérieure à  $k$ , alors le nombre de points de  $Sq^k(\sigma)$  d'ordonnée  $i$  (resp d'abscisse  $i$ ) est strictement supérieur à  $k$  et forcément on trouve un seul point de chaque  $Sq^j(\sigma)$  pour tout  $0 \leq j \leq k-1$ . Ainsi  $U_k$  est l'ensemble des indices  $i$  de  $\beta(\sigma)$  tels que la  $i$ -ème lettre soit strictement supérieure à  $k$ . De même,  $V_k$  est l'ensemble des indices  $i$  de  $\alpha(\sigma)$  tels que la  $i$ -ème lettre soit strictement supérieure à  $k$ . Par conséquent, l'application  $\sigma \mapsto (\alpha(\sigma), \beta(\sigma))$  est bijective.

D'autre part, les mots  $\alpha(\sigma)$  et  $\beta(\sigma)$  sont réarrangements l'un de l'autre, car le nombre d'occurrences de la lettre  $k+1$  ( $k \geq 0$ ) dans chacun d'eux est égal au nombre de lignes saillantes de  $Sq^k(\sigma)$ .

Nous montrons maintenant que  $\alpha(\sigma)$  et  $\beta(\sigma)$  sont des mots de Yamanouchi identiques respectivement à  $\varphi_n(P(\sigma))$  et  $\varphi_n(Q(\sigma))$ .

Comme  $P(\sigma)$  et  $Q(\sigma)$  sont des tableaux de Young standards de même forme sur  $n$  éléments, alors chaque  $i \in [n]$  apparaît dans  $P(\sigma)$  et  $Q(\sigma)$  une seule fois, alors pour montrer que  $\varphi_n(P(\sigma)) =$

$\alpha(\sigma)$  (resp.  $\varphi_n(Q(\sigma)) = \beta(\sigma)$ ), il suffit de montrer que  $\alpha_i$  (resp.  $\beta_i$ ) est le numéro de la ligne de  $P(\sigma)$  (resp.  $Q(\sigma)$ ) où est placé  $i$ .

D'après la proposition 3.30, il existe une ligne saillante  $L^{\alpha_i-1}$  de  $Sq^{\alpha_i-1}(\sigma)$  telle que  $y_{L^{\alpha_i-1}} = i$  (resp.  $L^{\beta_i-1}$  de  $Sq^{\beta_i-1}(\sigma)$  telle que  $x_{L^{\beta_i-1}} = i$ ), ce qui implique que  $i$  est un élément de  $P(\sigma)$  (resp.  $Q(\sigma)$ ) placé dans la ligne  $(\alpha_i - 1) + 1 = \alpha_i$  (resp.  $(\beta_i - 1) + 1 = \beta_i$ ), i.e.  $\alpha_i$  (resp.  $\beta_i$ ) est le numéro de la ligne de  $P(\sigma)$  (resp.  $Q(\sigma)$ ) où est placé  $i$ . Donc  $\varphi_n(P(\sigma)) = \alpha(\sigma)$  (resp.  $\varphi_n(Q(\sigma)) = \beta(\sigma)$ ).

Comme l'algorithme de Robinson-Schensted  $\sigma \rightarrow (P(\sigma), Q(\sigma))$  est une bijection, on a le théorème.

### 3.4 Quelques applications

La version géométrique de Viennot permet de fournir un cadre naturel au théorème de Schensted [S] sur la longueur maximale des suites croissantes et décroissantes extraites d'une permutation  $\sigma$ . En effet, rappelons le théorème de Schensted interprétant le nombre d'éléments de la première ligne et de la première colonne de  $P(\sigma)$ .

#### **Théorème 3.37**

*Soit  $\sigma \in S_n$ . Le nombre d'éléments de la première ligne (resp. colonne) de  $P(\sigma)$  est égal au cardinal maximum des suites strictement croissantes (resp. décroissantes) extraites de  $\sigma$ .*

Rappelons qu'une suite strictement croissante extraite de  $\sigma$  est une suite  $x_{i_1} < \dots < x_{i_p}$  avec  $i_1 < \dots < i_p$ , i.e. une suite qui correspond à une chaîne pour l'ordre naturel de points de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Les suites strictement décroissantes extraites de  $\sigma$  correspondent aux chaînes de points pour l'ordre croisé de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .

Le nombre  $p$  d'éléments de la première ligne de  $P(\sigma)$  est égal au nombre de lignes saillantes de  $\sigma$ . Ces lignes saillantes définissent une partition de  $\sigma$  en  $p$  suites strictement décroissantes et toute suite strictement croissante extraite de  $\sigma$  a donc au plus  $p$  éléments. On peut effectivement construire géométriquement des suites strictement croissantes extraites de  $\sigma$  ayant exactement un point sur chaque ligne saillante de  $\sigma$ . On ordonne ces lignes saillantes selon  $L_1 < \dots < L_p$  (voir la remarque 3.15). Supposons pour  $1 \leq k \leq p$  construit une suite strictement croissante  $\{m_k < \dots < m_p\}$  de points de  $\hat{\sigma}$  tel que  $m_j \in L_j$  pour  $j = k, \dots, p$ . L'intersection de  $L_{k-1}$  avec

$O_d^+(m_k)$  contient forcément des points de  $\hat{\sigma}$  car sinon  $m_k$  sera un point saillant de  $\hat{\sigma}$ , ce qui est absurde puisque  $L_k$  ne contient aucun point saillant de  $\hat{\sigma}$ . Soit  $m_{k-1}$  l'un de ces points. De proche en proche, on construit ainsi une suite strictement croissante  $\{m_1 < \dots < m_p\}$  de points de  $\hat{\sigma}$ . Cette construction permet d'ailleurs d'obtenir toutes les suites strictement croissantes de cardinal maximum extraites de  $\sigma$ .

### Exemple 3.38

Nous reprenons la permutation  $\sigma = 3641725$ . La construction précédente, effectuée sur la figure 3.20 ci-dessous, donne naissance aux suites croissantes suivantes :

$$(3, 6, 7), (3, 4, 7), (3, 4, 5) \text{ et } (1, 2, 5).$$

Sur la figure 3.20, on obtient la construction de la suite  $(3, 4, 7)$ .

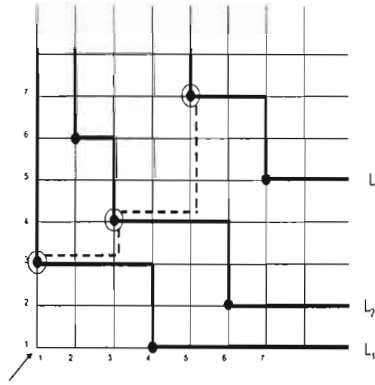


Figure 3.20 La suite croissante  $(3, 4, 7)$ .

Comme les suites strictement décroissantes extraites de  $\sigma$  correspondent aux chaînes de points pour l'ordre croisé de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , alors on considère les lignes saillantes supérieures gauches de  $\sigma$ . Le nombre  $p$  d'éléments de la première colonne de  $P(\sigma)$  est égal au nombre de lignes saillantes supérieures gauches de  $\sigma$ . Ces lignes saillantes définissent une partition de  $\sigma$  en  $p$  suites strictement croissantes et toute suite strictement décroissante extraite de  $\sigma$  a donc au plus  $p$  éléments. On peut effectivement construire géométriquement des suites strictement décroissantes extraites de  $\sigma$  ayant exactement un point sur chaque ligne saillante supérieure gauche de  $\sigma$ . On ordonne ces lignes saillantes selon  $L_1 <_C \dots <_C L_p$  (notons que  $L_i <_C L_j$  si et seulement si  $L_j \subseteq O_g^+(L_i)$ ). Supposons pour  $1 \leq k \leq p$  construit une suite strictement décroissante  $\{m_k <_C \dots <_C m_p\}$  de points de  $\hat{\sigma}$  tel que  $m_j \in L_j$  pour  $j = k, \dots, p$ . L'intersection de  $L_{k-1}$  avec  $O_d^-(m_k)$  contient for-

cément des points de  $\hat{\sigma}$  sinon  $m_k$  est un point saillant supérieur gauche de  $\hat{\sigma}$ , ce qui est absurde puisque  $L_k$  ne contient aucun point saillant supérieur gauche de  $\hat{\sigma}$ . Soit  $m_{k-1}$  l'un de ces points. De proche en proche, on construit ainsi une suite strictement décroissante  $\{m_1 <_C \dots <_C m_p\}$  de points de  $\hat{\sigma}$ . Cette construction permet d'ailleurs d'obtenir toutes les suites strictement décroissantes de cardinal maximum extraites de  $\sigma$ .

### Exemple 3.39

Nous reprenons la permutation  $\sigma = 3641725$ .

La construction précédente, effectuée sur la figure 3.21 ci-dessus, donne naissance aux suites décroissantes suivantes :

$$(6, 4, 1) \text{ et } (6, 4, 2).$$

Sur la figure 3.21, on obtient la construction de la suite  $(6, 4, 2)$ .

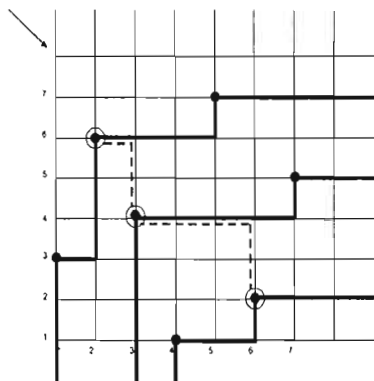


Figure 3.21 La suite décroissante  $(6, 4, 2)$ .

## CHAPITRE IV

### PERMUTATIONS MINIMALES DANS UN TAPIS D'APRÈS HAN.

Dans ce chapitre, nous donnons la preuve combinatoire de Guo-Niu Han du résultat dû à Hohlweg qui caractérise les permutations ayant le nombre d'inversions minimal dans un tapis. Rappelons que Hohlweg a démontré ce résultat à l'aide de la théorie de Kazhdan-Lusztig. La preuve de Guo-Niu Han s'inspire directement de l'algorithme géométrique que Viennot avait construit pour la correspondance de Robinson-Schensted.

Dans toute la suite de ce chapitre  $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p > 0)$  est un partage de l'entier  $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p$ . Soit  $\lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_k)$  son partage transposé et soit  $\sigma$  une permutation de  $[n]$ , i.e. un élément du groupe symétrique  $\mathcal{S}_n$ . La permutation  $\sigma$  sera écrite comme un mot  $\sigma = \sigma(1) \sigma(2) \dots \sigma(n)$  en les  $n$  lettres  $1, 2, \dots, n$ .

#### 4.1 Définitions et identités de base

Rappelons que la correspondance de Robinson-Schensted entre permutations et paires de tableaux de Young standards de même forme, se réalise par une suite d'insertions. Une description détaillée de cet algorithme est donnée au chapitre 2.

##### Définition 4.1

*On appelle forme d'une permutation  $\sigma$  la forme commune des deux tableaux de Young standards  $P(\sigma)$  et  $Q(\sigma)$  associés à  $\sigma$  par la correspondance de Robinson-Schensted.*

Rappelons qu'un *tapis* est l'ensemble de toutes les permutations de même forme. Dans un tapis, nous allons nous intéresser à des permutations particulières dites minimales.

**Définition 4.2**

*Les permutations minimales dans un tapis sont les permutations ayant le nombre minimal d'inversions dans ce tapis.*

Le but de ce chapitre est de caractériser les permutation minimales dans un tapis donné.

Comme la forme d'une permutation est la forme d'un tableau de Young standard, qu'on représente par un diagramme de Ferrers, elle peut être identifiée à un partage et donc à une composition particulière, nous donnons la définition suivante :

**Définition 4.3**

*On appelle composition de l'entier  $n$  toute suite  $(c_1, c_2, \dots, c_k)$  d'entiers strictement positifs de somme  $n$ .*

Lorsque la suite est décroissante  $c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_k > 0$ , on parle de partage de  $n$ . Donc un partage est une composition particulière.

**Définition 4.4**

*À toute composition  $c = (c_1, c_2, \dots, c_k)$  de  $n$ , on associe une permutation*

$$\sigma_c = \sigma_c(1) \sigma_c(2) \dots \sigma_c(n),$$

*définie comme le produit de juxtaposition*

$$\sigma_c = w_1 w_2 \dots w_k,$$

*avec*

$$w_1 = u_1(u_1 - 1) \dots 21,$$

*et pour tout  $2 \leq j \leq k$ ,*

$$w_j = u_j(u_j - 1) \dots (u_{j-1} + 2)(u_{j-1} + 1),$$

*où pour tout  $1 \leq j \leq k$ ,*

$$u_j = c_1 + c_2 + \dots + c_j.$$



Remarquons que pour tout  $1 \leq j \leq k$ , la longueur du mot  $w_j$  est  $c_j$ . Ainsi, la permutation  $\sigma_c$ , vue comme un mot en les lettres  $1, \dots, n$ , est de longueur  $n$ . Notons aussi que la permutation  $\sigma_c$  est la permutation la plus longue, i.e. ayant le plus grand nombre d'inversions, dans le sous-groupe de Young  $S_{c_1} \times \dots \times S_{c_k}$  du groupe  $S_n$  (voir Chapitre 5, Corollaire 5.2).

#### Exemple 4.5

Soit  $c = (c_1, c_2, c_3) = (3, 2, 2)$  une composition de l'entier 7. Ainsi

$$\begin{aligned} u_1 &= c_1 = 3, \\ u_2 &= c_1 + c_2 = 3 + 2 = 5, \\ u_3 &= c_1 + c_2 + c_3 = 3 + 2 + 2 = 7. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} w_1 &= u_1(u_1 - 1) \dots 21 = 321, \\ w_2 &= u_2(u_2 - 1) \dots (u_1 + 2)(u_1 + 1) = 5 \dots (3 + 1) = 54, \\ w_3 &= u_3(u_3 - 1) \dots (u_2 + 2)(u_2 + 1) = 7 \dots (5 + 1) = 76. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \sigma_c &= w_1 w_2 w_3 \\ &= 321 \cdot 54 \cdot 76 \\ &= 3215476. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\sigma_c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

#### Remarque 4.6

La permutation  $\sigma_c$ , vue comme l'application  $i \mapsto \sigma_c(i)$  ( $1 \leq i \leq n$ ), est une involution. En effet, comme

$$\begin{aligned} \sigma_c &= w_1 w_2 \dots w_k \\ &= \underbrace{u_1(u_1 - 1) \dots 21}_{\text{}} \underbrace{u_2(u_2 - 1) \dots (u_1 + 2)(u_1 + 1)}_{\text{}} \dots \\ &\quad \underbrace{u_k(u_k - 1) \dots (u_{k-1} + 2)(u_{k-1} + 1)}_{\text{}}. \end{aligned}$$

alors, on peut facilement représenter la permutation  $\sigma_c$  d'une façon classique comme suit :

$$\sigma_c = \begin{pmatrix} 1 & \dots & u_1 & u_1 + 1 & \dots & u_2 & \dots & u_{k-1} + 1 & \dots & n \\ u_1 & \dots & 1 & u_2 & \dots & u_1 + 1 & \dots & n & \dots & u_{k-1} + 1 \end{pmatrix}$$

Donc, il est clair que

$$\sigma_c(i) = c_1 - i + 1 \text{ pour tout } 1 \leq i \leq c_1,$$

ainsi on peut distinguer les deux cas suivants :

- si  $c_1$  est pair, alors pour tout  $1 \leq i \leq \frac{c_1}{2}$ ,

$$\sigma_c(i) = c_1 - i + 1 \text{ et } \sigma_c(c_1 - i + 1) = i,$$

i.e.

$$(i, c_1 - i + 1) \text{ est une transposition de } \sigma_c \text{ pour tout } 1 \leq i \leq \frac{c_1}{2}.$$

- si  $c_1$  est impair, alors pour tout  $1 \leq i \leq \frac{c_1 - 1}{2}$ ,

$$\sigma_c(i) = c_1 - i + 1 \text{ et } \sigma_c(c_1 - i + 1) = i,$$

et si  $i = \frac{c_1 - 1}{2} + 1 = \frac{c_1 + 1}{2}$ , alors

$$\sigma_c(i) = i.$$

Par conséquent,

$$(i, c_1 - i + 1) \text{ est une transposition de } \sigma_c \text{ pour tout } 1 \leq i \leq \frac{c_1 - 1}{2},$$

et

$$\frac{c_1 + 1}{2} \text{ est un point fixe de } \sigma_c.$$

De même, il est clair que si  $1 \leq i \leq c_j$ , pour un certain  $2 \leq j \leq k$ , alors

$$\sigma_c(c_1 + \dots + c_{j-1} + i) = c_1 + \dots + c_{j-1} + c_j - i + 1,$$

ainsi on peut distinguer les deux cas suivants :

- si  $c_j$  est pair, alors pour tout  $1 \leq i \leq \frac{c_j}{2}$ ,

$$\sigma_c(c_1 + \dots + c_{j-1} + i) = c_1 + \dots + c_j - i + 1 \text{ et } \sigma_c(c_1 + \dots + c_j - i + 1) = c_1 + \dots + c_{j-1} + i,$$

i.e.

$(c_1 + \dots + c_{j-1} + i, c_1 + \dots + c_j - i + 1)$  est une transposition de  $\sigma_c$ .

- si  $c_j$  est impair, alors pour tout  $1 \leq i \leq \frac{c_j - 1}{2}$ ,

$$\sigma_c(c_1 + \dots + c_{j-1} + i) = c_1 + \dots + c_j - i + 1 \text{ et } \sigma_c(c_1 + \dots + c_j - i + 1) = c_1 + \dots + c_{j-1} + i,$$

et si  $i = \frac{c_j - 1}{2} + 1 = \frac{c_j + 1}{2}$ , alors

$$\sigma_c(c_1 + \dots + c_{j-1} + i) = c_1 + \dots + c_{j-1} + i,$$

i.e.

$(c_1 + \dots + c_{j-1} + i, c_1 + \dots + c_j - i + 1)$  est une transposition de  $\sigma_c$ ,

et

$$c_1 + \dots + c_{j-1} + \frac{c_j + 1}{2} \text{ est un point fixe de } \sigma_c.$$

En somme  $\sigma_c$ , vue comme l'application  $i \mapsto \sigma_c(i)$  ( $1 \leq i \leq n$ ), est une involution telle que le nombre de points fixes de  $\sigma_c$  est le cardinal de l'ensemble

$$K = \{c_j \mid 1 \leq j \leq k \text{ et } c_j \text{ est impair}\},$$

alors que le nombre de transpositions de  $\sigma_c$  est

$$\sum_{c_j \in K} \frac{c_j - 1}{2} + \sum_{c_j \in \{c_1, \dots, c_k\} \setminus K} \frac{c_j}{2}$$

#### Proposition 4.7

La permutation  $\sigma_c$  est de longueur  $\sum_{i=1}^k \binom{c_i}{2} = \frac{1}{2} \left( \left( \sum_{i=1}^k c_i^2 \right) - n \right)$ , i.e. le nombre d'inversions de la permutation  $\sigma_c$  est  $\sum_{i=1}^k \binom{c_i}{2}$ .

#### Preuve

Rappelons que la table d'inversions  $y_1 y_2 \dots y_n$  de la permutation  $x_1 x_2 \dots x_n$  est obtenue en posant :  $y_j$  = le nombre d'éléments qui sont à gauche de  $j$  et plus grand que  $j$ . En d'autres mots,  $y_j$  est le nombre d'inversions qui ont  $j$  comme une deuxième composante. Par exemple, la permutation 591826473 a la table d'inversions 236402210. Puisque 5 et 9 sont à gauche de 1 ; 5, 9 et 8 sont à gauche de 2 ; etc. Ainsi cette permutation a

$$20 = 2 + 3 + 6 + 4 + 0 + 2 + 2 + 1 + 0$$

inversions.

Nous allons calculer la longueur de la permutation  $\sigma_c$  à partir de sa table d'inversions. En effet, la permutation

$$\sigma_c = \underbrace{u_1 (u_1 - 1) \dots 1}_{c_1} \underbrace{u_2 (u_2 - 1) \dots (u_1 + 1)}_{c_2} \dots \underbrace{u_k (u_k - 1) \dots (u_{k-1} + 1)}_{c_k}.$$

a la table d'inversions

$$\underbrace{(c_1 - 1) (c_1 - 2) \dots 10}_{c_1} \underbrace{(c_2 - 1) (c_2 - 2) \dots 10}_{c_2} \dots \underbrace{(c_k - 1) (c_k - 2) \dots 10}_{c_k}.$$

car le mot

$$u_1 (u_1 - 1) \dots 21$$

est de longueur  $c_1$  et pour tout  $2 \leq j \leq k$ , le mot

$$u_j (u_j - 1) \dots (u_{j-1} + 2) (u_{j-1} + 1)$$

est de longueur  $c_j$ . Ainsi le nombre d'inversions de la permutation  $\sigma_c$  est

$$\begin{aligned} & \underbrace{(c_1 - 1) + (c_1 - 2) + \dots + 1 + 0}_{c_1} + \underbrace{(c_2 - 1) + (c_2 - 2) + \dots + 1 + 0}_{c_2} + \dots \\ & + \underbrace{(c_k - 1) + (c_k - 2) + \dots + 1 + 0}_{c_k} \\ &= \frac{c_1}{2} ((c_1 - 1) + 0) + \frac{c_2}{2} ((c_2 - 1) + 0) + \dots + \frac{c_k}{2} ((c_k - 1) + 0) \\ &= \frac{c_1 (c_1 - 1)}{2} + \frac{c_2 (c_2 - 1)}{2} + \dots + \frac{c_k (c_k - 1)}{2} \\ &= \binom{c_1}{2} + \binom{c_2}{2} + \dots + \binom{c_k}{2} \\ &= \sum_{i=1}^k \binom{c_i}{2} \end{aligned}$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \binom{c_i}{2} &= \frac{c_1 (c_1 - 1)}{2} + \frac{c_2 (c_2 - 1)}{2} + \dots + \frac{c_k (c_k - 1)}{2} \\ &= \frac{(c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_k^2) - (c_1 + c_2 + \dots + c_k)}{2} \\ &= \frac{(c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_k^2) - n}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left( \left( \sum_{i=1}^k c_i^2 \right) - n \right), \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve de cette proposition.

#### Corollaire 4.8

Si la composition  $c = (c_1, c_2, \dots, c_k)$  de l'entier  $n$  est un réarrangement de  $\lambda^t = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_k)$ , alors la permutation  $\sigma_c$  est de longueur  $n(\lambda)$ , i.e.

$$\text{inv}(\sigma_c) = n(\lambda) = \sum_{i=1}^k \binom{\lambda'_i}{2}.$$

#### Preuve

Soit  $c = (c_1, c_2, \dots, c_k)$  une composition de l'entier  $n$ . Si la composition  $c$  est un réarrangement de  $\lambda^t = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_k)$ , i.e.  $\{c_1, c_2, \dots, c_k\} = \{\lambda'_1, \dots, \lambda'_k\}$ , alors

$$\frac{1}{2} \left( \left( \sum_{i=1}^k c_i^2 \right) - n \right) = n(\lambda) = .$$

En effet, Rappelons que si  $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p > 0)$  est un partage de l'entier  $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p$  et si  $\lambda^t = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_k)$  est son partage conjugué, alors la fonction  $n(\lambda)$  est définie par

$$n(\lambda) = \sum_{i=1}^k \binom{\lambda'_i}{2}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} n(\lambda) &= \sum_{i=1}^k \binom{\lambda'_i}{2} \\ &= \sum_{i=1}^k \binom{c_i}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left( \left( \sum_{i=1}^k c_i^2 \right) - n \right). \end{aligned}$$

Donc, d'après la proposition 4.7, si la composition  $c = (c_1, c_2, \dots, c_k)$  de l'entier  $n$  est un réarrangement de  $\lambda^t = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_k)$ , alors la permutation  $\sigma_c$  est de longueur  $n(\lambda)$ .

#### Remarque 4.9

Si la composition  $c = (c_1, c_2, \dots, c_k)$  de l'entier  $n$  est un réarrangement de  $\lambda^t = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_k)$ , alors la permutation  $\sigma_c$  est de forme  $\lambda$ . En effet, comme

$$\sigma_c = \underbrace{u_1(u_1 - 1) \dots 1}_{\text{cycle } (1 \dots u_1)} \underbrace{u_2(u_2 - 1) \dots (u_1 + 1)}_{\text{cycle } (u_1 + 1 \dots u_2)} \dots \underbrace{u_k(u_k - 1) \dots (u_{k-1} + 1)}_{\text{cycle } (u_{k-1} + 1 \dots u_k)},$$

alors on peut vérifier facilement que

$$\begin{aligned}
 P_0 &= \emptyset, \\
 P_1 &= P_0 \leftarrow \sigma_c(1) \\
 &= P_0 \leftarrow u_1 \\
 &= \boxed{u_1}, \\
 P_2 &= P_1 \leftarrow \sigma_c(2) \\
 &= \boxed{u_1} \leftarrow (u_1 - 1) \\
 &= \begin{array}{|c|} \hline u_1 \\ \hline u_1 - 1 \\ \hline \end{array}.
 \end{aligned}$$

En continuant cette suite d'insertions, on obtient

$$P_{c_1} = \begin{array}{|c|} \hline u_1 \\ \hline u_1 - 1 \\ \hline \vdots \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array},$$

$$\begin{aligned}
 P_{c_1+1} &= P_{c_1} \leftarrow \sigma_c(c_1 + 1) \\
 &= P_{c_1} \leftarrow u_2 \\
 &= \begin{array}{|c|} \hline u_1 \\ \hline u_1 - 1 \\ \hline \vdots \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline u_2 \\ \hline \end{array}.
 \end{aligned}$$

En continuant cette suite d'insertions, on obtient le tableau standard  $P_{c_1+c_2}$  qui a deux colonnes seulement ; la première colonne est de longueur  $\max\{c_1, c_2\}$  et la deuxième colonne est de longueur  $\min\{c_1, c_2\}$ . En effet, on peut distinguer les deux cas suivants :

- $c_1 \geq c_2$  :

dans ce cas la première colonne de  $P_{c_1+c_2}$  est

$u_1$
$u_1 - 1$
$\vdots$
2
1

(elle est de longueur  $c_1$  car  $u_1 = c_1$ ) et la deuxième colonne est

$u_2$
$u_2 - 1$
$\vdots$
$u_1 + 2$
$u_1 + 1$

(elle est de longueur  $c_2$  car  $u_2 - (u_1 + 1) + 1 = (c_1 + c_2) - (c_1 + 1) + 1 = c_2$ ). En effet, comme  $c_2 \leq c_1$ , alors aucun élément de cette deuxième colonne ne se déplace vers la première colonne.

- $c_1 < c_2$  :

au niveau d'insertion de l'élément  $u_1 + c_1$ , on obtient un tableau standard ayant deux colonnes de même longueur  $c_1$ , ce qui implique que l'insertion des éléments  $u_1 + c_1 + 1, \dots, u_2$  dont le nombre est  $c_2 - c_1$ , va causer l'ajout de  $c_2 - c_1$  cases à la première colonne qui va avoir la longueur  $c_1 + (c_2 - c_1) = c_2$  alors que la longueur de la deuxième colonne reste  $c_1$ .

En continuant ce processus d'insertion, on obtient le tableau standard  $P_{c_1+c_2+c_3}$  qui a trois colonnes telles que la  $i$ -ème colonne est de longueur  $c'_i$  où  $c'_i$  dénote le  $i$ -ème élément de l'ensemble  $\{c_1, c_2, c_3\}$  par ordre décroissant. En effet, on peut distinguer les trois cas suivants :

- $c_3 \leq \min\{c_1, c_2\}$  :

au niveau d'insertion de l'élément  $(u_1 + 1)$ , on obtient le tableau  $P_{c_1+c_2}$ . Ensuite, l'insertion des éléments  $u_3, \dots, u_2 + 1$  dont le nombre est  $c_3$ , va causer l'ajout d'une troisième colonne de sorte qu'aucun élément de cette troisième colonne ne se déplace vers la deuxième ou la première colonne.

- $\min \{c_1, c_2\} \leq c_3 \leq \max \{c_1, c_2\}$  :

au niveau d'insertion de l'élément  $u_2 + \min \{c_1, c_2\}$ , on obtient un tableau standard ayant trois colonnes telles que la deuxième et la troisième colonne aient la même longueur, ce qui implique que l'insertion des éléments  $u_2 + \min \{c_1, c_2\} + 1, \dots, u_3$  dont le nombre est  $c_3 - \min \{c_1, c_2\}$ , va causer l'ajout de  $c_3 - \min \{c_1, c_2\}$  cases à la deuxième colonne qui reste moins longue que la première colonne car dans ce cas  $c_3 - \min \{c_1, c_2\} \leq \max \{c_1, c_2\} - \min \{c_1, c_2\}$ .

- $c_3 \geq \max \{c_1, c_2\}$  :

l'insertion des éléments  $u_2 + 1, \dots, u_2 + \min \{c_1, c_2\}$  va causer l'ajout d'une troisième colonne de longueur  $\min \{c_1, c_2\}$  et l'insertion des éléments  $u_2 + \min \{c_1, c_2\} + 1, \dots, u_2 + \max \{c_1, c_2\}$  va causer l'ajout de  $\max \{c_1, c_2\} - \min \{c_1, c_2\}$  cases à la deuxième colonne et l'insertion des éléments  $u_2 + \max \{c_1, c_2\} + 1, \dots, u_3$  va causer l'ajout de  $c_3 - \max \{c_1, c_2\}$  cases à la première colonne.

Donc dans les trois cas précédents, on obtient que  $P_{c_1+c_2+c_3}$  est un tableau standard tel que la  $i$ -ème colonne est de longueur  $c'_i$  où  $c'_i$  dénote le  $i$ -ème élément de  $\{c_1, c_2, c_3\}$  par ordre décroissant.

En général, on peut montrer par récurrence que pour tout  $1 \leq j \leq n$ ,

$P_{c_1+\dots+c_j}$  est un tableau standard tel que la  $i$ -ème colonne est de longueur  $c'_i$ ,

où  $c'_i$  dénote le  $i$ -ème élément de  $\{c_1, \dots, c_j\}$  par ordre décroissant.

Comme

$$\begin{aligned} P(\sigma_c) &= P_n \\ &= P_{c_1+\dots+c_k}, \end{aligned}$$

alors  $P(\sigma_c)$  est un tableau de Young standard ayant  $k$  colonnes de sorte que pour tout  $1 \leq i \leq k$ , la  $i$ -ème colonne est de longueur  $c'_i$  où  $c'_i$  dénote le  $i$ -ème élément de l'ensemble  $\{c_1, \dots, c_k\}$  par ordre décroissant.

Comme  $(c_1, \dots, c_k)$  est un réarrangement de  $\lambda^t = (\lambda'_1 \geq \dots \geq \lambda'_k)$ , alors forcément

$$c'_i = \lambda'_i \text{ pour tout } 1 \leq i \leq k.$$

Par conséquent, le tableau de Young standard  $P(\sigma_c)^T$  où  $^T$  désigne la transposition est formé de  $k$  lignes de sorte que pour tout  $1 \leq i \leq k$ , la  $i$ -ème ligne est de longueur  $\lambda'_i$ , i.e. le tableau de



Young standard  $P(\sigma_c)^T$  est de forme  $\lambda^t$ , ce qui implique que  $P(\sigma_c) = \left(P(\sigma_c)^T\right)^T$  est de forme  $\lambda = (\lambda^t)^t$ .

## 4.2 Théorème principal

Maintenant, nous allons donner la résultat principal de ce chapitre.

### Théorème 4.10

*Soient  $\lambda$  un partage et  $\lambda^t = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_k)$  son partage transposé. Alors l'ensemble des permutations minimales de forme  $\lambda$  est l'ensemble de toutes les involutions  $\sigma_c$  où  $c$  est un réarrangement de  $\lambda^t = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_k)$ .*

Mentionnons que ce résultat est dû à Hohlweg qui l'a démontré en utilisant la théorie de Kazhdan-Lusztig. La démonstration combinatoire de ce résultat donnée ci-après s'inspire directement de la version géométrique que Viennot a imaginé pour la correspondance de Robinson-Schensted. Une description détaillée de cette version est donnée au chapitre 3. En effet, l'algorithme de Viennot permet d'établir une relation d'*inégalité* entre le nombre d'inversions et la forme d'une permutation, bien qu'il soit difficile de reconnaître le nombre d'inversions d'une permutation  $\sigma$  à partir des tableaux de Young standards  $P(\sigma)$  et  $Q(\sigma)$  associés à  $\sigma$  par la correspondance de Robinson-Schensted ; ceci permet de trouver une preuve combinatoire pour ce résultat.

### Exemple 4.11

Pour  $\lambda = 331$  un partage de 7, on a  $\lambda^t = 322$ . Les trois réarrangement de  $\lambda^t$  sont 322, 232 et 223. D'après le théorème 4.10, l'ensemble des permutations minimales de forme 331 est donc  $\{\sigma_{322}, \sigma_{232}, \sigma_{223}\}$  avec

$$\begin{aligned}\sigma_{322} &= 321 \cdot 54 \cdot 76 \\ &= 3215476,\end{aligned}$$

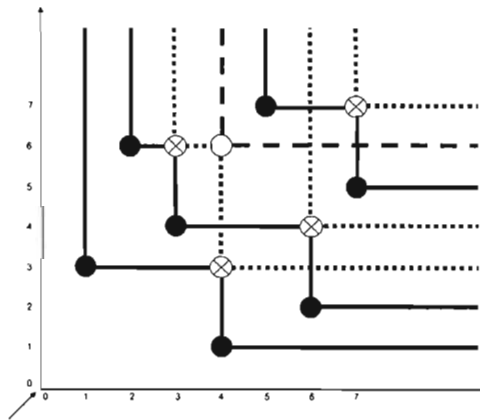
$$\begin{aligned}\sigma_{232} &= 21 \cdot 543 \cdot 76 \\ &= 2154376,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sigma_{223} &= 21 \cdot 43 \cdot 765 \\ &= 2143765\end{aligned}$$

Pour simplifier la preuve du théorème 4.10, nous allons utiliser les mêmes notations que celles du chapitre 3 ainsi que la même permutation  $\sigma = 3641725$  utilisée dans les exemples illustratifs du chapitre 3.

Pour la permutation  $\sigma = 3641725$  les squelettes successifs de  $\sigma$  apparaissent dans la figure 4.1 ci-dessous.



**Figure 4.1** Squelettes successifs de  $\sigma$ .

Notons  $SB(\sigma)$  l'ensemble des points blancs dans la figure 4.1, i.e. l'union de tous les squelettes  $Sq^k(\sigma)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Ainsi

$$\begin{aligned}SB(\sigma) &= \bigcup_{k \geq 1} Sq^k(\sigma) \\ &= \left( \bigcup_{k \geq 0} Sq^k(\sigma) \right) \setminus Sq^0(\sigma) \\ &= Sq^*(\sigma) \setminus Sq^0(\sigma).\end{aligned}$$

Le résultat suivant est alors évident.

**Lemme 4.12**

Soit  $\lambda$  la forme d'une permutation  $\sigma$  de  $S_n$ . Alors  $n(\lambda)$  est égal au cardinal de  $SB(\sigma)$ .

**Preuve**

Rappelons que pour tout partage  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$  de l'entier  $n$ ,

$$n(\lambda) = \sum_{i=1}^p (i-1) \lambda_i,$$

ainsi  $n(\lambda) = 0 \cdot \lambda_1 + \dots + (k-1) \cdot \lambda_k$  est la somme des nombres obtenus en remplissant le diagramme de Ferrers associé à  $\lambda$  de sorte que chaque case dans la première ligne soit remplie par un 0, chaque case dans la deuxième ligne soit remplie par un 1 et en général chaque case dans la  $k$ -ème ligne soit remplie par  $(k-1)$ . Par exemple pour  $\lambda = 43321$ , un partage de 13, on obtient

$$\begin{aligned} n(\lambda) &= 0 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \\ &= 19, \end{aligned}$$

Remarquons que 19 est la somme des entrées du tableau suivant

4			
3	3		
2	2	2	
1	1	1	
0	0	0	0

Remarquons que si  $T$  est un tableau de Young standard de forme  $\lambda$ , alors au tableau  $T$  correspond de façon classique un mot de Yamanouchi  $\eta = \eta_1 \dots \eta_n$  où  $\eta_i$  est le numéro de la ligne de  $T$  où est placé  $i$ . Ainsi, la somme  $\sum_{i=1}^n \eta_i$  est la somme des nombres obtenus en remplissant le diagramme de Ferrers associé à  $\lambda$  de sorte que chaque case dans la première ligne soit remplie par un 1, chaque case dans la deuxième ligne soit remplie par un 2 et en général chaque case dans la  $k$ -ème ligne soit remplie par  $k$ . Donc, il est clair que

$$\begin{aligned} n(\lambda) &= \sum_{i=1}^n (\eta_i - 1) \\ &= \left( \sum_{i=1}^n \eta_i \right) - \left( \sum_{i=1}^n 1 \right) \\ &= \left( \sum_{i=1}^n \eta_i \right) - n. \end{aligned}$$

Soit  $\sigma$  une permutation de forme  $\lambda$  et soit  $P(\sigma)$  le tableau de Young standard associé à  $\sigma$  par la correspondance de Robinson-Schensted. Au tableau  $P(\sigma)$  correspond de façon classique un mot de Yamanouchi  $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_n$  où  $\alpha_i$  est le numéro de la ligne de  $P(\sigma)$  où est placé  $i$ . Viennot a montré que  $\alpha_i$  est le nombre de points de  $Sq^*(\sigma)$  d'ordonnée  $i$  (voir Chapitre 3, p. 120), ainsi

$$|Sq^*(\sigma)| = \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

On a :

$$\begin{aligned} |SB(\sigma)| &= |Sq^*(\sigma)| - |Sq^0(\sigma)| \\ &= |Sq^*(\sigma)| - |\hat{\sigma}| \\ &= \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \right) - n \\ &= \sum_{i=1}^n (\alpha_i - 1) \\ &= n(\lambda). \end{aligned}$$

Par conséquent, la preuve de ce lemme est terminée.

Remarquons que pour chaque  $i$ ,  $\alpha_i$  est le nombre de points de  $Sq^*(\sigma)$  d'ordonnée  $i$ , i.e le nombre de points d'intersection de la droite horizontale  $y = i$  et de  $Sq^*(\sigma)$ . Comme pour chaque  $1 \leq i \leq n$ , la droite horizontale  $y = i$  contient forcément un seul point de  $Sq^0(\sigma)$  et d'autres points, s'ils existent, de  $SB(\sigma)$ . Alors  $(\alpha_i - 1)$  est le nombre de points d'intersection de la droite horizontale  $y = i$  et de  $SB(\sigma)$ , i.e.  $(\alpha_i - 1)$  est le nombre de points de  $SB(\sigma)$  d'ordonnée  $i$ . Par conséquent,

$$\begin{aligned} |SB(\sigma)| &= \sum_{i=1}^n (\alpha_i - 1) \\ &= n(\lambda). \end{aligned}$$

dans la figure 4.2 suivante, notons  $Rot(\sigma)$  l'ensemble des points blancs. Ce sont les points  $(x, y)$  tels qu'il existe deux autres points  $(x', y)$  et  $(x, y')$  de la permutation  $\sigma$  avec les conditions  $x' < x$  et  $y > y'$ . La figure 4.2 ci-dessous est appelée diagramme de Rothe (voir la remarque 1.29 du chapitre 1). Une propriété tout à fait élémentaire du diagramme de Rothe est que le nombre d'inversions de la permutation est égal au cardinal de  $Rot(\sigma)$ , i.e.

$$\text{inv}(\sigma) = |Rot(\sigma)|.$$

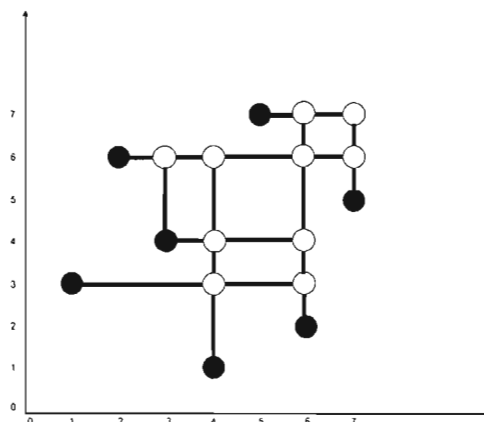


Figure 4.2 Le diagramme de Rothe d'une permutation et le nombre d'inversions.

Il est clair que  $SB(\sigma)$  est un sous-ensemble de  $Rot(\sigma)$  comme on peut le voir en comparant les figures 4.1 et 4.2. On en déduit le lemme suivant :

**Lemme 4.13**

Soit  $\lambda$  la forme de la permutation  $\sigma$ . Alors on a

$$\text{inv}(\sigma) \geq n(\lambda)$$

**Preuve**

Il suffit de remarquer que

$$\text{inv}(\sigma) = |Rot(\sigma)|$$

et que, d'après le lemme 4.12,

$$n(\lambda) = |SB(\sigma)|$$

et que  $|SB(\sigma)| \leq |Rot(\sigma)|$  car  $SB(\sigma)$  est un sous-ensemble de  $Rot(\sigma)$ .

D'après le corollaire 4.8 et la remarque 4.9 et le lemme 4.13,  $\sigma_c$  est une permutation minimale de forme  $\lambda$ . Montrons que toutes les permutations minimales de forme  $\lambda$  sont de ce type.

Rappelons qu'un point  $(x, y)$  de la permutation  $\sigma$  est dit saillant s'il n'y a pas de point  $(i, j)$  de la permutation tel que  $(x, y) \in O((i, j))$ , i.e.  $i \leq x$  et  $j \leq y$  et  $(i, j) \neq (x, y)$ .

**Définition 4.14**

Deux points saillants  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$  d'une permutation  $\sigma$  sont dit consécutifs s'il n'y a pas de point saillant  $(i, j)$  de la permutation tel que  $i$  est compris entre  $x_1$  et  $x_2$ .

**Lemme 4.15**

Soit  $\sigma$  une permutation telle que

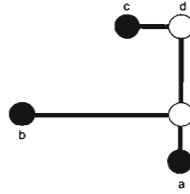
$$\text{inv}(\sigma) = n(\lambda). \quad (4.1)$$

Si  $a = (x_a, y_a)$  et  $b = (x_b, y_b)$  sont deux points saillants consécutifs de  $\sigma$  tels que  $x_b < x_a$ . Alors  $x_b = x_a - 1$  et  $y_b = y_a + 1$ .

**Preuve**

Si la conclusion du lemme 4.15 est fausse, alors il existe un point de la permutation  $c = (x_c, y_c)$  tel que  $x_b < x_c < x_a$ . Comme  $c = (x_c, y_c)$  est un point non saillant de la permutation  $\sigma$  car  $a$  et  $b$  sont deux points saillants consécutifs de  $\sigma$ , alors  $c \in O(b) \setminus O(a)$ , ce qui implique que  $y_c > y_b$ . Prenons pour  $y_c$  la plus petite valeur satisfaisant  $y_c > y_b$ , comme illustré dans la figure 4.3. On constate que le point  $d = (x_a, y_c)$  appartient à  $\text{Rot}(\sigma)$  mais pas à  $SB(\sigma)$ , i.e. on aurait  $SB(\sigma) \subsetneq \text{Rot}(\sigma)$  et donc

$$\text{inv}(\sigma) = |\text{Rot}(\sigma)| > |SB(\sigma)| = n(\lambda).$$



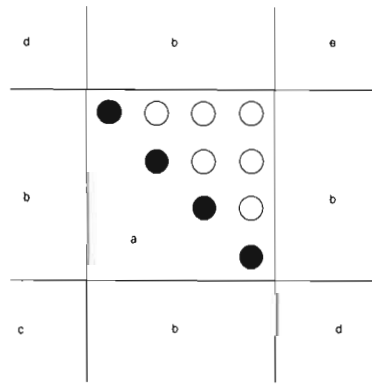
**Figure 4.3** Comparaison entre  $SB(\sigma)$  et  $\text{Rot}(\sigma)$ .

**4.3 Démonstration du théorème principal**

Il suffit de montrer que si  $\sigma$  est une permutation minimale de forme  $\lambda$ , alors  $\sigma$  est de type  $\sigma_c$  où  $c$  est une composition de l'entier  $n$ . En effet, soit  $\sigma$  une permutation telle que  $\text{inv}(\sigma) = n(\lambda)$ . Soit  $\hat{\sigma} = \{(i, \sigma(i)) \in [n] \times [n] \mid 1 \leq i \leq n\}$  la quasi-permutation qui représente  $\sigma$  dans le plan entier  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . D'après le lemme 4.15 et comme le point  $(1, \sigma(1))$  est un point saillant de  $\sigma$ ,

alors l'ensemble  $S_g^-(\hat{\sigma})$  de tous les points saillants de la permutation  $\sigma$  peut être représenté par la figure 4.4 ci-dessous. En effet  $S_g^-(\hat{\sigma}) = \{m_1, \dots, m_{c_1}\}$  où  $c_1 \geq 1$ , est un ensemble de points de  $\hat{\sigma}$  formant une chaîne  $\{m_1 \leq_C m_2 \leq_C \dots \leq_C m_{c_1}\}$  pour l'ordre croisé (remarquons que  $m_1 = (1, \sigma(1))$ ), tel que

$$\begin{aligned} O(\hat{\sigma}) &= O\{m_1, \dots, m_{c_1}\} \\ &= \bigcup_{i=1}^{c_1} O(m_i). \end{aligned}$$



**Figure 4.4** Analyse des points non-saillants.

Ainsi pour tout  $1 \leq i \leq c_1 - 1$ , les points  $m_i$  et  $m_{i+1}$  sont deux points saillants consécutifs de  $\sigma$ . Par conséquent et d'après le lemme 4.15,

$$\begin{aligned} m_2 &= (1 + 1, \sigma(1) - 1) \\ &= (2, \sigma(1) - 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_3 &= (2 + 1, (\sigma(1) - 1) - 1) \\ &= (3, \sigma(1) - 2). \end{aligned}$$

En général, pour tout  $1 \leq i \leq c_1$

$$\begin{aligned} m_i &= (i, \sigma(1) - (i - 1)) \\ &= (i, \sigma(1) - i + 1). \end{aligned}$$

Sur la figure 4.4 ci-dessus, on peut vérifier que :

- les régions  $b$  ne contiennent pas de point de la permutation  $\sigma$  car  $\sigma$  est une permutation et donc  $\hat{\sigma}$  est une quasi-permutation, i.e.  $\hat{\sigma}$  est une partie finie de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  ayant au plus un point par ligne et par colonne.
- la région  $c$  ne contient pas de point de la permutation  $\sigma$  car sinon la région  $a$  ne pourrait pas contenir les points saillants de  $\sigma$ . En effet, si  $m$  est un point de la permutation  $\sigma$  dans la région  $c$ , alors les points dans la région  $a$  seront contenus dans l'ombre (inférieur gauche) de  $m$  et donc tous les points de la région  $a$  ne pourront pas être des points saillants de la permutation  $\sigma$ .
- les régions  $d$  ne contiennent pas de point de la permutation  $\sigma$  car autrement il y aurait d'autres points saillants dans ces régions. En effet, la région  $a$  contient tous les points saillants de la permutation  $\sigma$ .

Donc tous les points non-saillants de la permutation  $\sigma$  sont dans la région  $e$ . Comme l'ensemble des points de la permutation  $\sigma$  dans la région  $a$  est l'ensemble  $\{m_1, \dots, m_{c_1}\}$  et comme l'ensemble des points de la permutation  $\sigma$  dans la région  $e$  est l'ensemble  $\hat{\sigma} \setminus \{m_1, \dots, m_{c_1}\}$  et comme  $\hat{\sigma}$  est une quasi-permutation, alors forcément

$$\begin{aligned} m_{c_1} &= (c_1, \sigma(1) - c_1 + 1) \\ &= (c_1, 1), \end{aligned}$$

ce qui implique que  $\sigma(1) - c_1 + 1 = 1$ , i.e.  $\sigma(1) = c_1$ . Ainsi

$$S_g^-(\hat{\sigma}) = \{m_1, \dots, m_{c_1}\},$$

avec

$$m_i = (i, c_1 - i + 1), \text{ pour tout } 1 \leq i \leq c_1 - 1,$$

i.e.

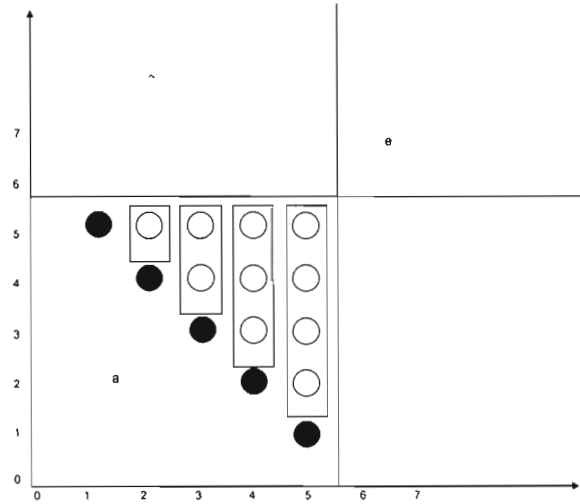
$$m_1 = (1, c_1), m_2 = (2, c_1 - 1), \dots, m_{c_1-1} = (c_1 - 1, 2), m_{c_1} = (c_1, 1).$$

En itérant ce raisonnement aux points de la région  $e$ , on démontre le théorème 4.10. En effet, En supprimant les points  $m_1, \dots, m_{c_1}$ , on obtient que la restriction de  $\sigma$  à  $\{c_1 + 1, \dots, n\}$  est une permutation de l'ensemble  $\{c_1 + 1, \dots, n\}$  qu'on va noter encore par  $\sigma$ . Cette nouvelle permutation  $\sigma$  vérifie aussi la condition 4.1 citée ci-dessus. En effet, il suffit de remarquer que le nombre



de points de  $Rot(\sigma)$  dans la région  $a$  (voir la figure 4.5 ci-dessous) est

$$\begin{aligned} (c_1 - 1) + (c_1 - 2) + \dots + 1 &= \frac{c_1}{2} \cdot ((c_1 - 1) + 1) \\ &= \frac{c_1^2}{2}, \end{aligned}$$



**Figure 4.5** Points de  $Rot(\sigma)$  dans la région  $a$ .

et le nombre de points de  $SB(\sigma)$  dans la région  $a$  est aussi  $\frac{c_1^2}{2}$  de sorte que  $(c_1 - 1)$  point appartient à  $Sq(\sigma)$  et  $(c_1 - 2)$  point appartient à  $Sq^2(\sigma)$  et en général pour tout  $1 \leq i \leq c_1 - 1$ ,  $(c_1 - i)$  point appartient à  $Sq^i(\sigma)$  (voir la figure 4.6 ci-dessous).

Donc en faisant le même raisonnement et en supposons que le nouveau ensemble  $S_g^-(\hat{\sigma}) = \{m_{c_1+1}, \dots, m_{c_1+c_2}\}$  avec  $m_{c_1+1} \leq_C \dots \leq_C m_{c_1+c_2}$  et  $c_2 \geq 1$ , on obtient

$$m_{c_1+1} = (c_1 + 1, c_1 + c_2), \dots, m_{c_1+c_2} = (c_1 + c_2, c_1 + 1).$$

Donc, En supprimant les points  $m_1, \dots, m_{c_1}, m_{c_1+1}, \dots, m_{c_1+c_2}$ , on obtient que la restriction de  $\sigma$  à l'ensemble  $\{c_1 + c_2 + 1, \dots, n\}$  est une permutation de l'ensemble  $\{c_1 + c_2 + 1, \dots, n\}$  qu'on va noter encore par  $\sigma$ . cette nouvelle permutation  $\sigma$  vérifie aussi la condition 4.1 citée ci-dessus. En itérant ce raisonnement jusqu'à ce qu'on supprime tous les points de  $\hat{\sigma}$ .

En somme, on a

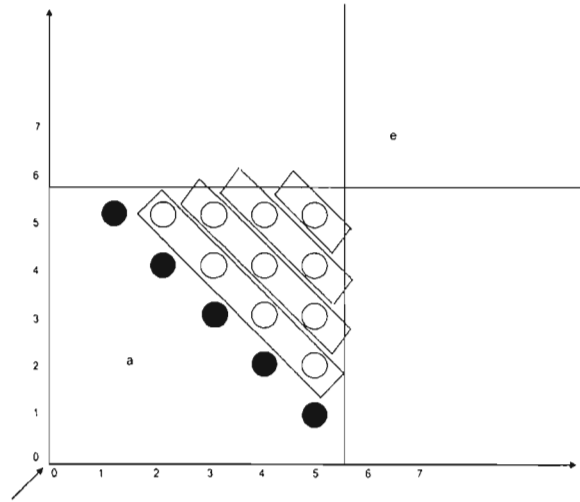


Figure 4.6 Points de  $SB(\sigma)$  dans la région  $a$ .

$$\hat{\sigma} = \{m_1, \dots, m_{c_1}, m_{c_1+1}, \dots, m_{c_1+c_2}, \dots, m_{c_1+c_2+\dots+c_{k-1}+1}, \dots, m_{c_1+c_2+\dots+c_k}\},$$

avec  $(c_1, c_2, \dots, c_k)$  une composition de l'entier  $n$ , i.e.  $c_1 + c_2 + \dots + c_k = n$  et

$$m_i = (i, c_1 - i + 1) \text{ si } 1 \leq i \leq c_1,$$

$$m_{c_1+i} = (c_1 + i, c_1 + c_2 - i + 1) \text{ si } 1 \leq i \leq c_2,$$

$$m_{c_1+c_2+i} = (c_1 + c_2 + i, c_1 + c_2 + c_3 - i + 1) \text{ si } 1 \leq i \leq c_3,$$

et en général, pour tout  $1 \leq p \leq k$

$$m_{c_1+\dots+c_p+i} = (c_1 + \dots + c_p + i, c_1 + \dots + c_p + c_{p+1} - i + 1) \text{ si } 1 \leq i \leq c_{p+1}.$$

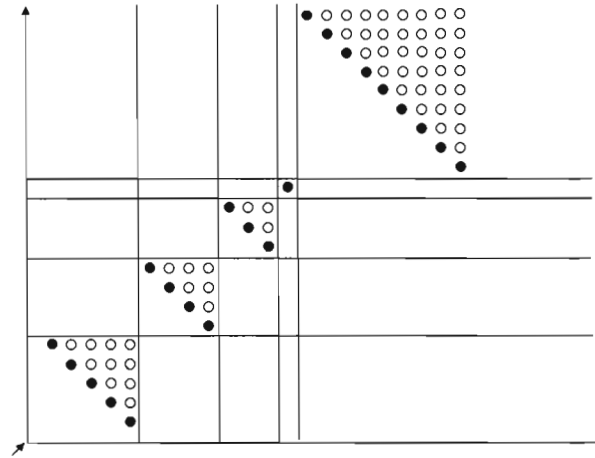
Donc

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma(1) \sigma(2) \dots \sigma(n) \\ &= \underbrace{\sigma(1) \dots \sigma(c_1)}_{\sigma(1)} \underbrace{\sigma(c_1+1) \dots \sigma(c_1+c_2)}_{\sigma(c_1+1)} \dots \underbrace{\sigma(c_1+\dots+c_{k-1}+1) \dots \sigma(c_1+\dots+c_k)}_{\sigma(c_1+\dots+c_k)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma &= \underbrace{c_1 \dots 1}_{(c_1+1)} \underbrace{(c_1 + c_2) \dots (c_1 + 1)}_{(c_1+c_2+1)} \dots \underbrace{n \dots (c_1 + \dots + c_{k-1} + 1)}_{(c_1+\dots+c_{k-1}+n+1)} \\
&= \underbrace{u_1 (u_1 - 1) \dots 1}_{u_1} \underbrace{u_2 (u_2 - 1) \dots (u_1 + 1)}_{u_2} \dots \underbrace{u_k (u_k - 1) \dots (u_{k-1} + 1)}_{u_k} \\
&= w_1 w_2 \dots w_k \\
&= \sigma_c,
\end{aligned}$$

où  $c = (c_1, c_2, \dots, c_k)$  est une composition de l'entier  $n$ .

Dans la figure 4.7 ci-dessous la représentation planaire de  $Sq^*(\sigma_c)$  avec  $c = (5, 4, 3, 1, 9)$  une décomposition de l'entier 22. Par conséquent, toutes les permutations minimales sont de type



**Figure 4.7** Représentation planaire de  $Sq^*(\sigma_{(5,4,3,1,9)})$ .

$\sigma_c$  où  $c$  est une composition de l'entier  $n$ .

## CHAPITRE V

### PERMUTATIONS MINIMALES ET MAXIMALES DANS UN TAPIS D'APRÈS HOHLWEG.

Le résultat principal de ce chapitre est le même résultat que celui du chapitre 4, i.e. une caractérisation des permutations ayant le nombre d'inversions minimal dans un tapis donné. Ce résultat est dû à Hohlweg qui l'a démontré algébriquement à l'aide de la théorie de Kazhdan-Lusztig. Plus précisément, ce chapitre concerne les cellules bilatères de Kazhdan-Lusztig dans le groupe symétrique ainsi que la correspondance de Robinson-Schensted. En effet, Kazhdan et Lusztig ont observé que les travaux de Jantzen et Vogan donnaient une description combinatoire de ces cellules grâce à cette correspondance  $\pi$ . Les cellules bilatères du groupe symétrique  $S_n$  sont indexées par les partages de  $n$  ; et étant donné un partage  $\lambda$ , la cellule bilatère  $\mathcal{T}^\lambda$  associée est l'ensemble des permutations dont l'image par  $\pi$  est un couple de tableaux de Young standards de forme  $\lambda$ . Par conséquent, une cellule bilatère est un tapis.

Le but de ce chapitre est de donner une description des éléments de longueur minimale et maximale dans les cellules bilatères, au moyen des tableaux, appelés les tableaux lisibles par colonnes, pour le point de vue combinatoire et au moyen des sous-groupes paraboliques, pour le point de vue de la théorie des groupes. Plus précisément, le résultat principal de ce chapitre est le suivant : l'ensemble des éléments de longueur minimale, dans une cellule bilatère associée à un partage  $\lambda$  de l'entier  $n$ , est l'ensemble des éléments de longueur maximale dans les sous-groupes paraboliques conjugués (i.e. les sous-groupes de Young conjugués) de type  $\lambda'$  où  $\lambda'$  dénote le partage conjugué de  $\lambda$ . Comme corollaire, Hohlweg a donné aussi les éléments de longueur maximale dans une cellule bilatère associée à  $\lambda$  ; il a donné la cardinalité de ces ensembles ainsi que la longueur des éléments minimaux (resp. maximaux) dans une cellule bilatère. Notons que son résultat est le premier résultat qui relie la correspondance de Robinson-Schensted avec la longueur d'une permutation (le nombre d'inversions). La preuve donnée n'est cependant pas

combinatoire.

Dans toute la suite de ce chapitre  $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p > 0)$  est un partage de l'entier  $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p$  et  $\lambda^t = (\lambda_1^t, \dots, \lambda_k^t)$  son partage conjugué. Soit  $\sigma$  une permutation de  $[n]$ , i.e. un élément du groupe symétrique  $S_n$ . La permutation  $\sigma$  sera écrite comme un mot  $\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\dots\sigma(n)$  en les  $n$  lettres  $1, 2, \dots, n$ . La longueur de  $\sigma$ , qu'on note  $\ell(\sigma)$ , est le nombre d'inversions de  $\sigma$ .

## 5.1 Sous-groupes de Young et tableaux lisibles par colonnes

Rappelons qu'un groupe de Coxeter est un groupe  $W$  qui a une présentation d'une forme spéciale : nous avons un ensemble de générateurs  $S \subseteq W$  tel que les relations permettant de définir tous les éléments de  $W$  sont des relations de la forme  $s^2 = 1$  et  $(st)^{m(s,t)} = 1$  où  $s \neq t$  sont des éléments de  $S$  et  $m(s, t) = m(t, s) > 1$  sont des entiers positifs (l'entier  $m(s, t)$  est l'ordre de l'élément  $st$ ). Ainsi, ce groupe est généré par des involutions et les seules relations additionnelles sont celles qui donnent l'ordre d'un produit de deux générateurs quelconques. L'exemple standard est le groupe symétrique  $S_n$  en  $n$  lettres avec générateurs les transpositions élémentaires  $\{(i, (i+1)) \mid 1 \leq i \leq n-1\}$ .

Rappelons aussi que si  $(W, S)$  est un groupe de Coxeter, alors *un sous-groupe parabolique* de  $W$  est un sous-groupe généré par un sous-ensemble de  $S$ . En d'autres mots, pour tout  $J \subseteq S$ , le sous-groupe  $W_J = \langle s \mid s \in J \rangle$  est appelé un sous-groupe parabolique de  $W$  et un tel sous-groupe est particulièrement intéressant car  $(W_J, J)$  est aussi un groupe de Coxeter. Ainsi si  $|S| = n$ , alors  $W$  possède  $2^n$  sous-groupes paraboliques distincts. *Dans le cas particulier du groupe symétrique  $S_n$ , les sous-groupes paraboliques sont précisément les sous-groupes de Young.*

Donc  $(S_n, S)$  est un système de Coxeter du type  $A_{n-1}$  où  $S$ , l'ensemble des générateurs, est constitué des  $(n-1)$  transpositions élémentaires  $\sigma_i = (i, i+1)$  où  $i = 1, \dots, n-1$ . Ainsi la longueur  $\ell(\sigma)$  d'une permutation  $\sigma$ , i.e. la longueur minimale de  $\sigma$  comme un mot en les lettres dans  $S$ , est juste son nombre d'inversions qui est le nombre minimal de transpositions élémentaires, i.e. d'éléments de  $S$ , nécessaires pour décomposer  $\sigma$  sous la forme d'un produit de telles transpositions.

Une bijection classique entre les sous-groupes paraboliques (i.e. les sous-groupes de Young) de

$\mathcal{S}_n$  et les compositions de l'entier  $n$  est obtenue comme suit :

Pour une composition  $c = (c_1, c_2, \dots, c_k)$  de  $n$ , posons

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \mathcal{M}(c) \\ &= \{ \sigma_{c_1+\dots+c_j} \mid j = 1, \dots, k-1 \}.\end{aligned}$$

Alors  $W_{\mathcal{M}} = \{s \in S \mid s \notin \mathcal{M}\}$  est un sous-groupe parabolique de  $\mathcal{S}_n$  qui est isomorphe au groupe  $\mathcal{S}_{c_1} \times \mathcal{S}_{c_2} \times \dots \times \mathcal{S}_{c_k}$ . Chaque sous-groupe parabolique de  $\mathcal{S}_n$  peut être étiqueté par une unique composition de  $n$ . En effet, à chaque sous-groupe parabolique de  $\mathcal{S}_n$  correspond un sous-ensemble, unique,  $I \subseteq S$ . Soit  $I \subseteq S$  et  $S \setminus I = \{\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_{k-1}}\}$  avec  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{k-1} \leq n-1$ . Posons

$$\begin{cases} c_1 = i_1, \\ c_j = i_j - i_{j-1} \text{ pour tout } 2 \leq j \leq k-1, \\ c_k = n - i_{k-1}, \end{cases}$$

ainsi les  $c_i$  sont des entiers strictement positifs tels que  $\sum_{i=1}^k c_i = n$ , i.e.

$$c = (c_1, c_2, \dots, c_k)$$

est une composition de l'entier  $n$ . De cette manière, nous avons obtenu une composition, unique, de l'entier  $n$ , associée au sous-ensemble  $I$  de  $S$ , qu'on note  $c_I = (c_1, c_2, \dots, c_k)$ . De plus,  $W_I = \{s \in S \mid s \notin I\}$ , le sous-groupe parabolique de  $\mathcal{S}_n$  associé à  $I$  est tel que, à isomorphisme près,

$$W_I = \mathcal{S}_{c_1} \times \mathcal{S}_{c_2} \times \dots \times \mathcal{S}_{c_k},$$

ce qui montre que les sous-groupes paraboliques du groupe symétrique  $\mathcal{S}_n$  sont précisément les sous-groupes de Young. Par exemple, dans  $\mathcal{S}_9$ , si  $I = \{\sigma_1, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_7\}$ , alors  $S \setminus I = \{\sigma_2, \sigma_5, \sigma_6, \sigma_8\}$ , ce qui implique que

$$c_I = (2, 3, 1, 2, 1)$$

et

$$\begin{aligned}W_I &= \mathcal{S}_{c_I} \\ &= \mathcal{S}_2 \times \mathcal{S}_3 \times \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2 \times \mathcal{S}_1.\end{aligned}$$

Rappelons que si  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \vdash n$ , alors le sous-groupe de Young de  $\mathcal{S}_n$  correspondant est

$$\mathcal{S}_\lambda = \mathcal{S}_{\{1, 2, \dots, \lambda_1\}} \times \mathcal{S}_{\{\lambda_1+1, \lambda_1+2, \dots, \lambda_1+\lambda_2\}} \times \dots \times \mathcal{S}_{\{n-\lambda_p+1, n-\lambda_p+2, \dots, n\}}.$$

En général  $\mathcal{S}_{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)}$  et  $\mathcal{S}_{\lambda_1} \times \mathcal{S}_{\lambda_2} \times \dots \times \mathcal{S}_{\lambda_k}$  sont isomorphes comme groupes. Si nous imaginons que les  $n$  lettres  $1, 2, \dots, n$  sont des objets distincts placés dans  $k$  cellules où la  $i$ -ème cellule contient  $\lambda_i$  objets pour tout  $i = 1, \dots, k$ , alors le sous-groupe  $\mathcal{S}_{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)}$  du groupe symétrique  $\mathcal{S}_n$  est le groupe constitué de toutes les permutations qui n'envoie aucun objet hors de sa cellule, i.e. une telle permutation permute les objets de chaque cellule entre eux sans les permuter avec les objets d'une autre cellule. Par exemple

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{(3,3,2,1)} &= \mathcal{S}_{\{1,2,3\}} \times \mathcal{S}_{\{4,5,6\}} \times \mathcal{S}_{\{7,8\}} \times \mathcal{S}_{\{9\}} \\ &\cong \mathcal{S}_3 \times \mathcal{S}_3 \times \mathcal{S}_2 \times \mathcal{S}_1.\end{aligned}$$

### Proposition 5.1

La permutation de  $\mathcal{S}_n$  de longueur maximale est  $\sigma_{(n)}$  où

$$\sigma_{(n)} = n(n-1) \dots 21.$$

De plus,

$$\ell(\sigma_{(n)}) = \binom{n}{2}.$$

### Preuve

Comme  $\sigma_{(n)} = n(n-1) \dots 21$ , alors la table d'inversions de  $\sigma_{(n)}$  est

$$012 \dots (n-1),$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned}\ell(\sigma_{(n)}) &= 0 + 1 + 2 + \dots + (n-1) \\ &= \frac{n}{2} (0 + (n-1)) \\ &= \frac{n(n-1)}{2} \\ &= \binom{n}{2}.\end{aligned}$$

Montrons que

$$\ell(\sigma) \leq \binom{n}{2} \text{ pour tout } \sigma \in \mathcal{S}_n.$$

En effet, définissons

$$\Gamma(\sigma) = \{(x, y) \in [n] \times [n] \mid y = \sigma(i) \text{ et } i < x \leq n \text{ pour un certain } i \in [n]\}.$$

On peut déduire facilement que

$$|\Gamma(\sigma)| = \binom{n}{2}$$

et que  $\text{Rot}(\sigma) \subseteq \Gamma(\sigma)$  où  $\text{Rot}(\sigma)$  est l'ensemble des points  $(x, y)$  dans  $[n] \times [n]$  tels qu'il existe deux autres points  $(x', y)$  et  $(x, y')$  de la quasi-permutation  $\hat{\sigma}$  avec les conditions  $x' < x$  et  $y > y'$ . Ainsi

$$\ell(\sigma) = \text{inv}(\sigma) = |\text{Rot}(\sigma)| \leq |\Gamma(\sigma)| = \binom{n}{2}.$$

### Corollaire 5.2

Soit  $c = (c_1, \dots, c_k)$  (avec  $c_i \geq 1$ ) une composition de l'entier  $n$ . Alors le sous-groupe de Young

$$\mathcal{S}_c = \mathcal{S}_{c_1} \times \dots \times \mathcal{S}_{c_k} \cong \mathcal{S}_{\{1, 2, \dots, c_1\}} \times \mathcal{S}_{\{c_1+1, c_1+2, \dots, c_1+c_2\}} \times \dots \times \mathcal{S}_{\{n-c_k+1, n-c_k+2, \dots, n\}}$$

contient une unique permutation  $\sigma_c$  de longueur maximale où

$$\sigma_c = \underbrace{c_1(c_1-1) \dots 21 (c_1+c_2)(c_1+c_2-1) \dots (c_1+2)(c_1+1)}_{\dots n(n-1) \dots (n-c_k+2)(n-c_k+1)}.$$

De plus,

$$\ell(\sigma_c) = \sum_{i=1}^k \binom{c_i}{2}.$$

### Preuve

Comme

$$\mathcal{S}_{\{c_1+\dots+c_{i-1}+1, c_1+\dots+c_{i-1}+2, \dots, c_1+\dots+c_{i-1}+c_i\}} \cong \mathcal{S}_{c_i} = \mathcal{S}_{\{1, 2, \dots, c_i\}},$$

alors, d'après la proposition 5.1, l'élément de longueur maximale dans le groupe  $\mathcal{S}_{c_i}$  est l'élément  $\sigma_{(c_i)} = c_i(c_i-1) \dots 21$  qui correspond par cet isomorphisme à l'élément

$$(c_1 + \dots + c_i)(c_1 + \dots + c_i - 1) \dots (c_1 + \dots + c_{i-1} + 2)(c_1 + \dots + c_{i-1} + 1)$$

dans le groupe  $\mathcal{S}_{\{c_1+\dots+c_{i-1}+1, c_1+\dots+c_{i-1}+2, \dots, c_1+\dots+c_{i-1}+c_i\}}$  et il est de longueur  $\binom{c_i}{2}$ . Donc la permutation  $\sigma_c = \sigma_{(c_1)}\sigma_{(c_2)} \dots \sigma_{(c_k)}$  (vue comme un mot en les lettres  $1, 2, \dots, n$ ) est une involution dans  $\mathcal{S}_c$ ; elle est de longueur maximale dans  $\mathcal{S}_c$  et

$$\ell(\sigma_c) = \sum_{i=1}^k \binom{c_i}{2},$$



car le mot  $\sigma_c$  est le produit de juxtaposition des mots  $\sigma_{(c_1)}, \sigma_{(c_2)}, \dots, \sigma_{(c_k)}$  et les lettres dans  $\sigma_{(c_{i+1})}$  (vues comme des entiers dans  $[n]$ ) sont plus grandes que les lettres dans  $\sigma_{(c_i)}$ .

En notant  $\lambda(c)$  l'unique partage de  $n$  obtenu en réarrangeant les entiers  $c_1, \dots, c_k$  dans un ordre décroissant où  $c = (c_1, \dots, c_k)$  est une composition de l'entier  $n$ , on obtient le résultat suivant (voir [GeP00, Proposition 2.3.8]) :

*Deux sous-groupes de Young  $S_c$  et  $S_d$ , où  $c$  et  $d$  sont deux compositions de l'entier  $n$ , sont conjugués dans  $S_n$  si et seulement si  $\lambda(c) = \lambda(d)$ .*

Soit  $\lambda$  un partage de  $n$ , dénotons  $\mathcal{D}_n(\lambda)$  l'ensemble de tous les tableaux de Young standards à  $n$  éléments de forme  $\lambda$  et

$$\mathcal{D}_n^2(\lambda) = \{(P, Q) \mid P, Q \in \mathcal{D}_n(\lambda)\}.$$

La correspondance de Robinson-Schensted est la bijection (voir Chapitre 2)

$$\begin{aligned} \pi : S_n &\longrightarrow \mathcal{D}_n^2(\lambda) \\ \sigma &\longmapsto (P(\sigma), Q(\sigma)). \end{aligned}$$

Soit  $T$  un tableau standard de forme  $\lambda$ , alors on a les propriétés suivantes :

(a)  $\sigma \in S_n$  est une involution si et seulement si  $P(\sigma) = Q(\sigma)$  (voir Chapitre 2, Corollaire 2.22). Par conséquent, on dénote  $\sigma_T = \pi^{-1}(T, T)$  l'unique involution obtenue à partir de  $T$  par la correspondance inverse de Robinson-Schensted.

(b) l'ensemble

$$[T]_P = \{\sigma \in S_n \mid P(\sigma) = T\}$$

contient une unique involution qui est  $\sigma_T$ .

(c) l'ensemble

$$[T]_Q = \{\sigma \in S_n \mid Q(\sigma) = T\}$$

contient une unique involution qui est  $\sigma_T$ .

Les propriétés (b) et (c) découlent directement de la première propriété (a).

Ces ensembles sont appelés les classes de Knuth et les classes de Knuth duales respectivement. Dans [BJ99], les auteurs ont donné une méthode algébrique pour étudier ces ensembles. Dans leurs article, ils ont appelé  $[T]_P$  une classe plaxique et  $[T]_Q$  une classe coplaxique. Ils ont aussi introduit le nom *tapis* pour l'ensemble

$$\mathcal{T}^\lambda = \pi^{-1}(\mathfrak{D}_n^2(\lambda)),$$

où  $\lambda$  est un partage de  $n$ .

Dans un tapis, i.e. dans une cellule bilatère, nous allons nous intéresser à des permutations particulières à savoir les permutations minimales et les permutations maximales. Les permutations minimales sont les permutations ayant le nombre d'inversions minimal et les permutations maximales sont celles ayant le nombre d'inversions maximal.

Le but de ce chapitre est de décrire, pour tout partage  $\lambda$  de  $n$ , l'ensemble  $\mathcal{T}_{\min}^\lambda$  des éléments de  $\mathcal{T}^\lambda$  de longueur minimale et l'ensemble  $\mathcal{T}_{\max}^\lambda$  des éléments de  $\mathcal{T}^\lambda$  de longueur maximale.

Schützenberger a montré que l'application

$$T \mapsto \sigma_T = \pi^{-1}(T, T)$$

est une bijection entre les tableaux de Young standards de forme un partage de l'entier  $n$  et les involutions de  $\mathcal{S}_n$  (voir Chapitre 2, Corollaire 2.22).

### Définition 5.3

*Un tableau standard  $T$  est un tableau lisible par colonnes s'il possède la propriété suivante :*

*Pour tout  $1 \leq p \leq n$ , soit  $p$  est dans la première ligne de  $T$  ou bien si  $p$  est dans la  $i$ -ème ligne de  $T$  ( $i > 1$ ) alors  $(p-1)$  est dans la  $(i-1)$ -ème ligne de  $T$ , i.e.*

*si  $p$  est dans la ligne  $T_i$ , alors  $(p-1)$  est dans la ligne  $T_{i-1}$ , pour tout  $2 \leq i \leq k$  où  $T_i$  dénote la  $i$ -ème ligne de  $T$  et  $k$  le nombre de lignes de  $T$ .*

### Remarque 5.4

Remarquons que si  $n$  est dans la ligne  $T_i$  du tableau lisible par colonnes  $T$  avec  $i > 1$ , alors  $n$  est dans la dernière case (la case située complètement à droite) de  $T_i$ ,  $(n-1)$  est dans la dernière

case de  $T_{i-1}$  et en général,  $(n-p)$  est dans la dernière case de  $T_{i-p}$  pour tout  $0 \leq p \leq i-1$ . Donc  $(n-i+1)$  est dans la dernière case de  $T_1$ . Par conséquent, le tableau obtenu de  $T$  en supprimant les éléments  $n-i+1, n-i+2, \dots, n-1, n$  est aussi un tableau lisible par colonnes à  $(n-i)$  éléments.

### Exemple 5.5

Si  $\lambda = (2, 2, 1)$ , alors les tableaux lisibles par colonnes de forme  $\lambda$  sont :

3		5	
2	5	2	4
1	4	1	3

Un *tableau superstandard par colonnes* de forme  $\lambda$  est le tableau étiqueté du bas vers le haut de chaque colonne et ceci de la gauche vers la droite. Dans l'exemple ci-dessus, le premier tableau est un tableau superstandard par colonnes de forme  $(2, 2, 1)$ . Il est clair qu'un tableau superstandard par colonnes est un tableau lisible par colonnes. Remarquons que si  $T$  est un tableau superstandard par colonne, alors  $\pi^{-1}(T, T)$ , l'image du couple  $(T, T)$  par la correspondance inverse de Robinson-Schensted, est la permutation obtenue en lisant les colonnes de  $T$ , du haut vers le bas et ceci en commençant de la colonne située complètement à gauche jusqu'à la colonne située complètement à droite. Par exemple si

3	
2	5
1	4

est un tableau superstandard par colonnes, alors

$$\begin{aligned}\sigma_T &= \pi^{-1}(T, T) \\ &= 32154.\end{aligned}$$

### Remarque 5.6

Soit  $c$  une composition de l'entier  $n$ . On peut remarquer facilement que  $\sigma_c$  est une involution (voir Chapitre 4, Remarque 4.6) et que la correspondance de Robinson-Schensted lui associe une paire  $(T, T)$  de tableaux de Young standards où  $T$  est un tableau lisible par colonnes de forme

$\lambda(c)$ . Par exemple, soit  $c = (2, 3, 1)$  une composition de l'entier 6, alors

$$\begin{aligned}\sigma_c &= \sigma_{(2,3,1)} \\ &= 21 \cdot 543 \cdot 6 \\ &= 215436,\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\pi(\sigma_{(3,2,1)}) = (P(\sigma_{(3,2,1)}), Q(\sigma_{(3,2,1)}))$$

avec

$$P(\sigma_{(3,2,1)}) = Q(\sigma_{(3,2,1)}) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 5 & & \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline 1 & 3 & 6 \\ \hline \end{array}.$$

Ainsi  $T = P(\sigma_{(3,2,1)}) = Q(\sigma_{(3,2,1)})$  est un tableau lisible par colonnes de forme  $(3, 2, 1) = \lambda((2, 3, 1))$ .

Remarquons aussi que si  $\lambda$  est un partage de l'entier  $n$  et  $T$  un tableau lisible par colonnes de forme  $\lambda$ , alors  $\sigma_T = \sigma_c$  où  $c$  est une composition de  $n$  telle que  $\lambda(c) = \lambda^t$ . Par exemple, considérons le partage  $\lambda = (3, 2, 1, 1)$  de 7, et

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 7 & & \\ \hline 6 & & \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline \end{array}$$

un tableau lisible par colonnes de forme  $\lambda$ .

Nous allons utiliser la correspondance inverse de Robinson-Schensted pour passer du couple  $(T, T)$  à la permutation  $\sigma_T$ , i.e.  $\sigma_T = \pi^{-1}(T, T)$ . En effet, cet algorithme décrit au chapitre 2, définition 2.6, donne

$$\begin{array}{ccccc} k & P_k & s & t & x_k \\ 7 & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 7 & & \\ \hline 6 & & \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline \end{array} & 4 & 1 & 4 \end{array}$$

$k$	$P_k$	$s$	$t$	$x_k$						
6	<table><tr><td>7</td></tr><tr><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>5</td></tr></table>	7	3	6	1	2	5	3	1	5
7										
3	6									
1	2	5								
5	<table><tr><td>3</td><td>7</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>6</td></tr></table>	3	7	1	2	6	2	2	6	
3	7									
1	2	6								
4	<table><tr><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>7</td></tr></table>	3	1	2	7	1	3	7		
3										
1	2	7								
3	<table><tr><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td></tr></table>	3	1	2	2	1	2			
3										
1	2									
2	<table><tr><td>1</td><td>3</td></tr></table>	1	3	1	2	3				
1	3									
1	<table><tr><td>1</td></tr></table>	1	1	1	1					
1										

Donc on obtient une involution

$$\begin{aligned}\sigma_T &= 1327654 \\ &= \sigma_{(1,2,4)},\end{aligned}$$

vue comme un mot,  $\sigma_{(1,2,4)}$  est l'élément de longueur maximale dans le sous-groupe de Young  $\mathcal{S}_{(1,2,4)} \cong \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2 \times \mathcal{S}_4$ . Remarquons que  $\lambda^t = (4, 2, 1)$  et que  $\lambda(c) = \lambda((1, 2, 4)) = (4, 2, 1) = \lambda^t$ .

La proposition suivante donne le lien entre les tableaux lisibles par colonnes de forme  $\lambda$  et les éléments de longueur maximale dans les sous-groupes de Young  $\mathcal{S}_c$  où  $c$  est une composition de  $n$  telle que  $\lambda(c) = \lambda^t$ .

**Proposition 5.7**

*Soit  $\lambda$  un partage de  $n$ , alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

*i)  $T$  est un tableau lisible par colonnes de forme  $\lambda$  ;*

*ii)  $\sigma_T = \sigma_c$ , où  $c$  est une composition de  $n$  telle que  $\lambda(c) = \lambda^t$ , i.e.  $\sigma_T$  est l'élément de longueur*

maximale (une involution) dans un sous-groupe de Young  $\mathcal{S}_c$  où  $c$  est une composition de  $n$  telle que  $\lambda(c) = \lambda^t$ .

### Preuve

Notons que l'involution  $\sigma_c$  est l'élément de longueur maximale dans le sous-groupe de Young  $\mathcal{S}_c$  tel que  $\lambda(c) = \lambda^t$ .

Soit  $\lambda$  un partage de  $n$ . Supposons que  $T$  est un tableau lisible par colonnes de forme  $\lambda$  et montrons que  $\sigma_T = \pi^{-1}(T, T) = \sigma_c$  pour une certaine composition  $c$  de  $n$  telle que  $\lambda(c) = \lambda^t$ . En utilisant la remarque 5.4, on obtient que si  $n$  est dans la dernière case de la ligne  $T_i$  pour un certain  $i$ , alors il existe  $1 \leq p \leq n-1$  tel que  $p+1$  est dans la dernière case de la ligne  $T_1$ ,  $p+j$  est dans la dernière case de la ligne  $T_j$  pour tout  $1 \leq j \leq i$ , ce qui implique que  $n = p+i$ . En appliquant les  $i$  premières étapes de la correspondance inverse de Robinson-Schensted, on obtient

$$\sigma_T = \sigma_{T'} n \dots (p+1),$$

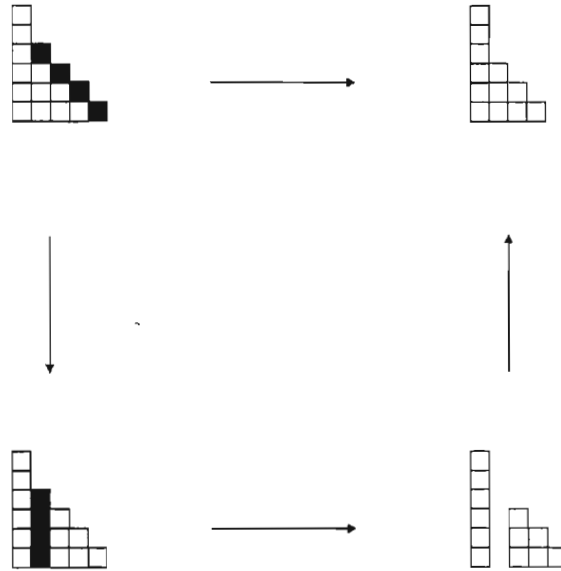
où  $T'$  est un tableau de Young standard obtenu en supprimant les éléments  $p+1, \dots, n$  du tableau  $T$ . Ainsi  $\sigma_{T'}$  est une permutation de l'ensemble  $\{1, \dots, p\}$ . Remarquons que  $T'$  est encore un tableau lisible par colonnes. Dénotons la forme du tableau  $T'$  par  $\lambda'$  où  $\lambda'$  est un partage de l'entier  $(n-i)$  tel que

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_i, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_k)$$

et

$$\lambda' = (\lambda_1 - 1, \dots, \lambda_i - 1, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_k)$$

(on supprime les parts nulles). Par induction sur  $n$ , supposons que  $\sigma_{T'}$  est l'élément de longueur maximale dans le sous-groupe de Young  $\mathcal{S}_{c'}$  où  $c'$  est une composition de l'entier  $(n-i)$  telle que  $\lambda(c') = (\lambda')^t$ . Ainsi  $\sigma_T$  est l'élément de longueur maximale dans le sous-groupe de Young  $\mathcal{S}_{c'} \times \mathcal{S}_i$  où  $c$  est une composition de l'entier  $n$  telle que  $c = (c', i)$  car  $\sigma_T$ , vu comme un mot, est le produit de juxtaposition des deux mots  $\sigma_{T'}$  et  $n \dots (p+1)$  qui sont respectivement les éléments de longueur maximale dans les sous-groupes de Young  $\mathcal{S}_{c'}$  et  $\mathcal{S}_i$ . Montrons que  $\lambda(c) = \lambda^t$ . Comme  $\lambda(c) = \lambda((c', i))$ , alors la suite décroissante  $\lambda(c)$  peut être obtenue de la suite décroissante  $\lambda(c')$  en lui ajoutant le terme  $i$  dans une place appropriée afin de conserver la décroissance. Comme  $\lambda(c') = (\lambda')^t$  et en remarquons que  $(\lambda')^t$  peut être obtenu de  $\lambda^t$  en supprimant la part  $i$  (voir la figure 5.1 ci-dessous, où l'entier  $n$  est dans la dernière case de la quatrième ligne, i.e.  $i = 4$ ), alors, d'après ce qui précède,  $\lambda(c) = \lambda^t$ .



**Figure 5.1**  $(\lambda')^t$  peut être obtenu de  $\lambda^t$  en supprimant la part  $i$ .

Inversement, soit  $c = (c_1, \dots, c_k)$  une composition de l'entier  $n$ . Comme

$$\sigma_c = c_1 \dots 1 \ c_1 + c_2 \dots c_1 + 1 \ \dots \ n \dots n - c_k + 1$$

est une involution de forme  $\lambda$  (voir Chapitre 4, Remarque 4.9),  $\pi(\sigma_c) = (T, T)$  où  $T$  est un tableau de Young standard de forme  $\lambda$ . Montrons que  $T$  est un tableau lisible par colonnes. En effet, la remarque 4.9 du chapitre 4 qui découle des propriétés de la correspondance de Robinson-Schensted et de la nature du mot  $\sigma_c$  en les lettres  $1, \dots, n$ , montre que si un certain  $i \in [n]$  est dans la ligne  $T_j$  du tableau  $T$ , alors forcément  $i + 1$  est dans la ligne  $T_{j+1}$ . Par conséquent,  $T$  est un tableau lisible par colonnes de forme  $\lambda$ .

## 5.2 Théorème principal

Dans [KL79], Kazhdan et Lusztig ont défini des relations d'équivalence remarquables dans  $\mathcal{S}_n$ , qui ont plusieurs applications dans la théorie des représentations. Les classes d'équivalence de ces relations ont été appelées les cellules gauches, les cellules droites et les cellules bilatères. Dans le groupe symétrique, Jantzen et Vogan [Ja83, Vo79] ont montré que ces cellules sont fortement liées à la correspondance de Robinson-Schensted (voir aussi [Ar00]). En particulier, la cellule bilatère associée à un partage  $\lambda$  de  $n$  est précisément l'ensemble de toutes les permutations

qui sont envoyées par la correspondance de Robinson-Schensted sur les paires de tableaux de Young standards de forme  $\lambda$ . Par conséquent, pour tout partage  $\lambda$  de  $n$ , une cellule bilatère associée à  $\lambda$  est le tapis  $\mathcal{T}^\lambda$  de toutes les permutations de  $S_n$  de forme  $\lambda$ . De même, un tapis  $\mathcal{T}^\lambda = \pi^{-1}(\mathcal{D}_n^2(\lambda))$  est une cellule bilatère pour tout partage  $\lambda$  de  $n$ .

Le résultat principal de ce chapitre est le résultat suivant :

### Théorème 5.8

Soient  $\lambda$  un partage de  $n$  et  $\mathcal{T}^\lambda$  sa cellule bilatère associée ; nous notons  $\mathcal{T}_{\min}^\lambda$  l'ensemble des éléments de  $\mathcal{T}^\lambda$  de longueur minimale. Alors

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\min}^\lambda &= \{\sigma_c \mid \lambda(c) = \lambda^t\} \\ &= \{\sigma_T \mid T \text{ est un tableau lisible par colonnes de forme } \lambda\},\end{aligned}$$

où  $\lambda^t$  dénote le partage conjugué de  $\lambda$ .

Remarquons que la proposition 5.7 implique que

$$\{\sigma_c \mid \lambda(c) = \lambda^t\} = \{\sigma_T \mid T \text{ est un tableau lisible par colonnes de forme } \lambda\}.$$

### Exemple 5.9

Considérons le partage  $\lambda = 3211$  de 7 ;  $\lambda^t = 421$ . Alors les tableaux lisibles par colonnes de forme  $\lambda$  sont :

$$\begin{array}{l} T_1 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & & \\ \hline 3 & & \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline 1 & 5 & 7 \\ \hline \end{array} ; \quad T_2 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & & \\ \hline 5 & & \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline 1 & 3 & 7 \\ \hline \end{array} ; \quad T_3 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 5 & & \\ \hline 4 & & \\ \hline 3 & 7 & \\ \hline 1 & 2 & 6 \\ \hline \end{array} \\ \\ T_4 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & & \\ \hline 3 & & \\ \hline 2 & 7 & \\ \hline 1 & 5 & 6 \\ \hline \end{array} ; \quad T_5 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 7 & & \\ \hline 6 & & \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} ; \quad T_6 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 7 & & \\ \hline 6 & & \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline \end{array} ; \end{array}$$



Les involutions correspondantes sont :

$$\begin{aligned}\sigma_{T_1} &= 4321657 = \sigma_{(4,2,1)}; & \sigma_{T_2} &= 2165437 = \sigma_{(2,4,1)}; & \sigma_{T_3} &= 1543276 = \sigma_{(1,4,2)}, \\ \sigma_{T_4} &= 4321576 = \sigma_{(4,1,2)}; & \sigma_{T_5} &= 2137654 = \sigma_{(2,1,4)}; & \sigma_{T_6} &= 1327654 = \sigma_{(1,2,4)},\end{aligned}$$

et

$$\mathcal{T}_{\min}^{(3,2,1,1)} = \{ \sigma_{(4,2,1)}, \sigma_{(2,4,1)}, \sigma_{(1,4,2)}, \sigma_{(4,1,2)}, \sigma_{(2,1,4)}, \sigma_{(1,2,4)} \}.$$

Soit  $\lambda$  un partage de  $n$  et  $T$  un tableau standard de forme  $\lambda$  [Sz63]. L'évacuation de Schützenberger de  $T$ , qu'on note  $T_{V.R}$ , est un tableau standard de forme  $\lambda$ . En particulier, Schensted a montré que

$$P(\sigma^*) = P^T(\sigma)$$

et Schützenberger a montré que

$$Q(\sigma^*) = Q_{V.R}^T(\sigma),$$

et que

$$\mathcal{T}^\lambda \sigma_{(n)} = \sigma_{(n)} \mathcal{T}^\lambda = \mathcal{T}^{\lambda^t}.$$

Rappelons que si  $\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\dots\sigma(n)$  est une permutation de  $\mathcal{S}_n$ , alors  $\sigma^*$ , l'image miroir de  $\sigma$ , est la permutation  $\sigma^* = \sigma(n)\sigma(n-1)\dots\sigma(1)$ . On peut aussi définir  $\sigma^*$  de manière plus formelle en posant  $\sigma^*(i) = \sigma(n-i+1)$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ .

### Remarque 5.10

Pour  $\sigma$  une permutation de  $\mathcal{S}_n$ ,

$$\sigma\sigma_{(n)} = \sigma^* \text{ et } \sigma_{(n)}\sigma = \left((\sigma^{-1})^*\right)^{-1}.$$

En effet, pour tout  $1 \leq i \leq n$ ,

$$\begin{aligned}(\sigma\sigma_{(n)})(i) &= \sigma(\sigma_{(n)}(i)) \\ &= \sigma(n-i+1) \\ &= \sigma^*(i).\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
(\sigma^{-1})^* &= \sigma^{-1} \sigma_{(n)} \\
&= (\sigma_{(n)} \sigma)^{-1},
\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned}
((\sigma^{-1})^*)^{-1} &= ((\sigma_{(n)} \sigma)^{-1})^{-1} \\
&= \sigma_{(n)} \sigma.
\end{aligned}$$

Remarquons que si  $\sigma = x_1 \dots x_n \in \mathcal{S}_n$  (vue comme un mot en les lettres  $1, 2, \dots, n$ ), alors

$$\sigma \sigma_{(n)} = \sigma^* = x_n \dots x_1$$

et

$$\sigma_{(n)} \sigma = (n - x_1 + 1) \dots (n - x_n + 1).$$

### Proposition 5.11

Soit  $\lambda$  un partage de  $n$  et  $\mathcal{T}^\lambda$  sa cellule bilatère associée. Alors

$$\mathcal{T}^\lambda \sigma_{(n)} = \sigma_{(n)} \mathcal{T}^\lambda = \mathcal{T}^{\lambda'}.$$

### Preuve

- $\mathcal{T}^\lambda \sigma_{(n)} = \mathcal{T}^{\lambda'}$  :

Soit  $\sigma \in \mathcal{T}^\lambda$ . Comme  $\sigma \sigma_{(n)} = \sigma^*$  et comme, d'après le théorème de Schented,  $\sigma^* \in \mathcal{T}^{\lambda'}$ , alors  $\mathcal{T}^\lambda \sigma_{(n)} \subseteq \mathcal{T}^{\lambda'}$ . Soit  $\tau \in \mathcal{T}^{\lambda'}$ . On a :

$$\begin{aligned}
\tau &= (\tau \sigma_{(n)}) (\sigma_{(n)})^{-1} \\
&= \tau^* (\sigma_{(n)})^{-1} \\
&= \tau^* \sigma_{(n)},
\end{aligned}$$

car  $\sigma_{(n)}$  est une involution. Comme, d'après le théorème de Schented,  $\tau^* \in \mathcal{T}^\lambda$ , alors

$$\tau = \tau^* \sigma_{(n)} \in \mathcal{T}^\lambda \sigma_{(n)},$$

ce qui implique que  $\mathcal{T}^{\lambda'} \subseteq \mathcal{T}^{\lambda}_{\sigma_{(n)}}$ . Par conséquent,  $\mathcal{T}^{\lambda}_{\sigma_{(n)}} = \mathcal{T}^{\lambda'}$ .

•  $\sigma_{(n)}\mathcal{T}^{\lambda} = \mathcal{T}^{\lambda'}$  :

Soit  $\sigma \in \mathcal{T}^{\lambda}$ . Comme  $\sigma_{(n)}\sigma = \left((\sigma^{-1})^{\star}\right)^{-1}$  et comme, d'après le théorème de Schented,  $\sigma^{\star} \in \mathcal{T}^{\lambda'}$  et d'après le théorème de Schützenberger  $\sigma^{-1} \in \mathcal{T}^{\lambda}$ , alors  $\left((\sigma^{-1})^{\star}\right)^{-1} \in \mathcal{T}^{\lambda'}$ . Ainsi  $\sigma_{(n)}\mathcal{T}^{\lambda} \subseteq \mathcal{T}^{\lambda'}$ . Montrons que  $\mathcal{T}^{\lambda'} \subseteq \sigma_{(n)}\mathcal{T}^{\lambda}$ . En effet, soit  $\tau \in \mathcal{T}^{\lambda'}$ . Comme  $\sigma_{(n)}$  est une involution, alors

$$\begin{aligned}\tau &= (\sigma_{(n)})^{-1} (\sigma_{(n)}\tau) \\ &= \sigma_{(n)} (\sigma_{(n)}\tau) .\end{aligned}$$

Pour conclure il suffit de remarquer que  $(\sigma_{(n)}\tau) \in \mathcal{T}^{\lambda}$  car  $\sigma_{(n)}\tau = \left((\tau^{-1})^{\star}\right)^{-1} \in \mathcal{T}^{\lambda}$ .

Cette proposition montre comment l'évacuation illustre la multiplication à gauche, la multiplication à droite et la conjugaison par  $\sigma_{(n)}$ .

### Proposition 5.12

Pour  $\sigma$  une permutation de  $S_n$ , on a :

$$\begin{aligned}(P(\sigma\sigma_{(n)}), Q(\sigma\sigma_{(n)})) &= (P^T(\sigma), Q_{V.R}^T(\sigma)), \\ (P(\sigma_{(n)}\sigma), Q(\sigma_{(n)}\sigma)) &= (P_{V.R}^T(\sigma), Q^T(\sigma))\end{aligned}$$

et

$$(P(\sigma_{(n)}\sigma\sigma_{(n)}), Q(\sigma_{(n)}\sigma\sigma_{(n)})) = (P_{V.R}(\sigma), Q_{V.R}(\sigma)).$$

### Preuve

Comme  $\sigma\sigma_{(n)} = \sigma^{\star}$ , alors d'après le théorème de Schented

$$\begin{aligned}P(\sigma\sigma_{(n)}) &= P(\sigma^{\star}) \\ &= P^T(\sigma),\end{aligned}$$

et d'après le théorème de Schützenberger

$$\begin{aligned}Q(\sigma\sigma_{(n)}) &= Q(\sigma^{\star}) \\ &= Q_{V.R}^T(\sigma).\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
 P(\sigma_{(n)}\sigma) &= P\left(\left((\sigma^{-1})^*\right)^{-1}\right) \\
 &= Q\left((\sigma^{-1})^*\right) \text{ car } P(\sigma^{-1}) = Q(\sigma) \\
 &= Q_{V,R}^T(\sigma^{-1}) \\
 &= \left((Q(\sigma^{-1}))^T\right)_{V,R} \\
 &= \left((P(\sigma))^T\right)_{V,R} \\
 &= P_{V,R}^T(\sigma).
 \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
 Q(\sigma_{(n)}\sigma) &= Q\left(\left((\sigma^{-1})^*\right)^{-1}\right) \\
 &= P\left((\sigma^{-1})^*\right) \text{ car } Q(\sigma^{-1}) = P(\sigma) \\
 &= P^T(\sigma^{-1}) \\
 &= (P(\sigma^{-1}))^T \\
 &= (Q(\sigma))^T \\
 &= Q^T(\sigma).
 \end{aligned}$$

Selon ce qui précède, on a :

$$\begin{aligned}
 P(\sigma_{(n)}\sigma\sigma_{(n)}) &= P(\sigma_{(n)}(\sigma\sigma_{(n)})) \\
 &= P_{V,R}^T(\sigma\sigma_{(n)}) \\
 &= \left((P(\sigma\sigma_{(n)}))^T\right)_{V,R} \\
 &= \left((P(\sigma^*))^T\right)_{V,R} \\
 &= \left(\left((P(\sigma))^T\right)^T\right)_{V,R} \\
 &= (P(\sigma))_{V,R} \\
 &= P_{V,R}(\sigma)
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
Q(\sigma_{(n)}\sigma\sigma_{(n)}) &= Q(\sigma_{(n)}(\sigma\sigma_{(n)})) \\
&= Q^T(\sigma\sigma_{(n)}) \\
&= (Q(\sigma\sigma_{(n)}))^T \\
&= (Q(\sigma^*))^T \\
&= (Q_{V.R}^T(\sigma))^T \\
&= \left( \left( (Q(\sigma))^T \right)_{V.R} \right)^T \\
&= \left( ((Q(\sigma))_{V.R})^T \right)^T \text{ car } (Q_{V.R})^T = (Q^T)_{V.R} \\
&= (Q(\sigma))_{V.R} \\
&= Q_{V.R}(\sigma).
\end{aligned}$$

**Proposition 5.13**

Pour  $\lambda$  un partage de l'entier  $n$ , on a :

$$\begin{aligned}
\{\sigma_{(n)}\sigma_c \mid \lambda(c) = \lambda\} &= \{\sigma_c\sigma_{(n)} \mid \lambda(c) = \lambda\} \\
&= \{(\sigma_c)^* \mid \lambda(c) = \lambda\}.
\end{aligned}$$

**Preuve**

Soit  $c = (c_1, \dots, c_k)$  une composition de  $n$  telle que  $\lambda(c) = \lambda$ . Ainsi

$$\begin{aligned}
\sigma_{(n)}\sigma_c &= \sigma_{(n)}\sigma_{(c_1, c_2, \dots, c_{k-1}, c_k)} \\
&= \sigma_{(n)}(\underbrace{u_1(u_1-1)\dots 21}_{u_1} \underbrace{u_2(u_2-1)\dots (u_1+2)(u_1+1)}_{u_2} \dots \underbrace{u_k(u_k-1)\dots (u_{k-1}+2)(u_{k-1}+1)}_{u_k}) \\
&= \underbrace{(n-u_1+1)(n-u_1+2)\dots (n-1)n}_{u_1} \\
&\quad \underbrace{(n-u_2+1)(n-u_2+2)\dots (n-u_1-1)(n-u_1)}_{u_2} \\
&\quad \dots \underbrace{(n-u_k+1)(n-u_k+2)\dots (n-u_{k-1}-1)(n-u_{k-1})}_{u_k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{(n)}\sigma_c &= \underbrace{(c_2 + \dots + c_k + 1)(c_2 + \dots + c_k + 2) \dots (n-1) n}_{(c_3 + \dots + c_k + 1)(c_3 + \dots + c_k + 2) \dots (c_2 + \dots + c_k - 1)(c_2 + \dots + c_k)} \\
&\quad \underbrace{\dots 12 \dots (c_k - 1) c_k}_{[c_k(c_k - 1) \dots 12 \dots (c_2 + \dots + c_k) \dots (c_3 + \dots + c_k + 2)(c_3 + \dots + c_k + 1) \\
&\quad n(n-1) \dots (c_2 + \dots + c_k + 2)(c_2 + \dots + c_k + 1)]^*} \\
&= \underbrace{[c_k(c_k - 1) \dots 12 \dots (c_k + \dots + c_2)(c_k + \dots + c_2 - 1) \dots (c_k + \dots + c_3 + 1)]^*}_{n(n-1) \dots (c_k + \dots + c_2 + 2)(c_k + \dots + c_2 + 1)]^*} \\
&= [\sigma_{(c_k, c_{k-1}, \dots, c_2, c_1)}]^*,
\end{aligned}$$

ce qui implique que  $\{\sigma_{(n)}\sigma_c \mid \lambda(c) = \lambda\} = \{(\sigma_c)^* \mid \lambda(c) = \lambda\}$  car si  $c = (c_1, \dots, c_k)$  est une composition de l'entier  $n$  telle que  $\lambda(c) = \lambda$ , alors  $(c_k, c_{k-1}, \dots, c_2, c_1)$  est aussi une composition de l'entier  $n$  telle que  $\lambda((c_k, c_{k-1}, \dots, c_2, c_1)) = \lambda(c) = \lambda$  et

$$\left\{ (c_1, \dots, c_k) \mid c_i \geq 1 \text{ et } \sum_{i=1}^k c_i = n \right\} = \left\{ (c_k, \dots, c_1) \mid c_i \geq 1 \text{ et } \sum_{i=1}^k c_i = n \right\}.$$

Remarquons que le fait que  $\sigma_c$  et  $\sigma_{(n)}$  sont des involutions implique que

$$\begin{aligned}
\{\sigma_{(n)}\sigma_c \mid \lambda(c) = \lambda\} &= \{(\sigma_{(n)})^{-1}(\sigma_c)^{-1} \mid \lambda(c) = \lambda\} \\
&= \{(\sigma_c\sigma_{(n)})^{-1} \mid \lambda(c) = \lambda\} \\
&= \{((\sigma_c)^*)^{-1} \mid \lambda(c) = \lambda\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{\sigma_{(n)}\sigma_c \mid \lambda(c) = \lambda\} &= \left\{ \left( (\sigma_{(c_1, c_2, \dots, c_{k-1}, c_k)})^* \right)^{-1} \mid \lambda((c_1, c_2, \dots, c_{k-1}, c_k)) = \lambda \right\} \\
&= \left\{ (\sigma_{(n)}\sigma_{(c_k, c_{k-1}, \dots, c_2, c_1)})^{-1} \mid \lambda((c_k, c_{k-1}, \dots, c_2, c_1)) = \lambda \right\} \\
&= \left\{ (\sigma_{(c_k, c_{k-1}, \dots, c_2, c_1)})^{-1}(\sigma_{(n)})^{-1} \mid \lambda((c_k, \dots, c_1)) = \lambda \right\} \\
&= \{\sigma_{(c_k, c_{k-1}, \dots, c_2, c_1)}\sigma_{(n)} \mid \lambda((c_k, \dots, c_1)) = \lambda\} \\
&= \{\sigma_c\sigma_{(n)} \mid \lambda(c) = \lambda\}.
\end{aligned}$$

### Proposition 5.14

Soit  $\sigma$  une permutation de  $\mathcal{S}_n$ . Alors

$$\ell(\sigma^*) = \ell(\sigma\sigma_{(n)}) = \binom{n}{2} - \ell(\sigma)$$

et

$$\ell(\sigma_{(n)}\sigma) = \binom{n}{2} - \ell(\sigma)$$

où  $\sigma^*$  est l'image miroir de  $\sigma$ .

### Preuve

Soit  $y_1 y_2 \dots y_n$  la table d'inversions de la permutation  $\sigma = \sigma(1) \sigma(2) \dots \sigma(n)$ . Alors  $y_j$  est le nombre d'éléments qui sont à gauche de la lettre  $j$  et plus grand que  $j$  dans le mot  $\sigma(1) \sigma(2) \dots \sigma(n)$  en les lettres  $1, 2, \dots, n$ . En d'autres mots,  $y_j$  est le nombre d'inversions de  $\sigma$  qui ont  $j$  comme une deuxième composante. Par exemple, la permutation 591826473 a la table d'inversions 236402210. Puisque 5 et 9 sont à gauche de 1 ; 5, 9 et 8 sont à gauche de 2 ; etc. Ainsi cette permutation a  $20 = 2 + 3 + 6 + 4 + 0 + 2 + 2 + 1 + 0$  inversions. Donc

$$\ell(\sigma) = y_1 + y_2 + \dots + y_n.$$

Remarquons que le nombre d'éléments qui sont à droite de la lettre  $j$  et plus grand que  $j$  dans le mot  $\sigma(1) \sigma(2) \dots \sigma(n)$  est  $(n - j - y_j)$  car le nombre de tous les éléments qui sont plus grand que  $j$  dans le mot  $\sigma(1) \sigma(2) \dots \sigma(n)$  est le cardinal de l'ensemble  $\{j + 1, \dots, n\}$ , i.e.  $(n - j)$ . On peut facilement déduire que la table d'inversions de la permutation  $\sigma^* = \sigma(n) \sigma(n-1) \dots \sigma(1)$  est

$$(n - 1 - y_1) (n - 2 - y_2) \dots (n - n - y_n),$$

ce qui implique que le nombre d'inversions de  $\sigma^*$  est

$$\begin{aligned} \ell(\sigma^*) &= \sum_{j=1}^n (n - j - y_j) \\ \ell(\sigma^*) &= (n - 1 - y_1) + (n - 2 - y_2) + \dots + (n - n - y_n) \\ &= \underbrace{(n + n + \dots + n)}_{n^2} - \underbrace{(1 + 2 + \dots + n)}_{\frac{n(n+1)}{2}} - \underbrace{(y_1 + y_2 + \dots + y_n)}_{\ell(\sigma)} \\ &= n^2 - \frac{n(n+1)}{2} - \ell(\sigma) \\ &= n \left( n - \frac{(n+1)}{2} \right) - \ell(\sigma) \\ &= n \left( \frac{2n - (n+1)}{2} \right) - \ell(\sigma) \\ &= n \left( \frac{n-1}{2} \right) - \ell(\sigma) \\ &= \frac{n(n-1)}{2} - \ell(\sigma) \\ &= \binom{n}{2} - \ell(\sigma). \end{aligned}$$

Comme l'inverse d'une permutation a exactement le même nombre d'inversions que la permutation elle-même et comme  $\ell(\sigma^*) = \binom{n}{2} - \ell(\sigma)$ , alors

$$\ell(\sigma_{(n)}\sigma) = \ell(\sigma_{(n)}) - \ell(\sigma).$$

En effet,

$$\begin{aligned} \ell(\sigma_{(n)}\sigma) &= \ell\left(\left((\sigma^{-1})^*\right)^{-1}\right) \\ &= \ell\left((\sigma^{-1})^*\right) \\ &= \binom{n}{2} - \ell(\sigma^{-1}) \\ &= \binom{n}{2} - \ell(\sigma). \end{aligned}$$

Remarquons aussi que

$$\ell(\sigma_{(n)}\sigma\sigma_{(n)}) = \ell(\sigma) \text{ pour tout } \sigma \in \mathcal{S}_n.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \ell(\sigma_{(n)}\sigma\sigma_{(n)}) &= \ell((\sigma_{(n)}\sigma)\sigma_{(n)}) \\ &= \ell\left((\sigma_{(n)}\sigma)^*\right) \\ &= \binom{n}{2} - \ell(\sigma_{(n)}\sigma) \\ &= \binom{n}{2} - \left(\binom{n}{2} - \ell(\sigma)\right) \\ &= \ell(\sigma). \end{aligned}$$

Dénotons  $d_c = \sigma_{(n)}\sigma_c$ . Remarquons que  $d_c(i) = n - \sigma_c(i) + 1$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ . On obtient le corollaire suivant :

**Corollaire 5.15**

*Soit  $\lambda$  un partage de  $n$  et  $\mathcal{T}^\lambda$  sa cellule bilatère associée, alors*

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\max}^\lambda &= \{\sigma_{(n)}\sigma_c \mid \lambda(c) = \lambda\} \\ &= \{d_c \mid \lambda(c) = \lambda\} \\ &= \{\sigma \mid Q_{V,R}^T(\sigma) = P(\sigma\sigma_{(n)}) \text{ est un tableau lisible par colonnes de forme } \lambda^t\}, \end{aligned}$$

où  $\lambda^t$  dénote le partage conjugué de  $\lambda$ .



**Proposition 5.16**

Soient  $\lambda$  un partage de  $n$  et  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ , alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(a)  $Q_{V.R}^T(\sigma) = P(\sigma\sigma_{(n)})$  est un tableau lisible par colonnes de forme  $\lambda^t$  ;

(b)  $\sigma = \sigma_{(n)}\sigma_c$  où  $c$  est une composition de  $n$  telle que  $\lambda(c) = \lambda$ .

**Preuve**

(a)  $\Rightarrow$  (b) :

Soit  $\sigma$  une permutation de  $\mathcal{S}_n$  telle que  $Q_{V.R}^T(\sigma) = P(\sigma\sigma_{(n)}) = T$  où  $T$  est un tableau lisible par colonnes de forme  $\lambda^t$ . Comme  $Q_{V.R}^T(\sigma) = Q(\sigma^*)$  et  $P(\sigma\sigma_{(n)}) = P(\sigma^*)$ , alors  $T = P(\sigma^*) = Q(\sigma^*)$ , ce qui implique que

$$\sigma^* = \pi^{-1}(T, T) = \sigma_T.$$

En utilisant la proposition 5.7, on obtient que

$$\sigma^* = \sigma_T = \sigma_c$$

où  $c$  est une composition de  $n$  telle que  $\lambda(c) = (\lambda^t)^t = \lambda$ . Donc

$$\sigma = (\sigma^*)^* = (\sigma_c)^* = \sigma_c\sigma_{(n)},$$

i.e.  $\sigma \in \{\sigma_c\sigma_{(n)} \mid \lambda(c) = \lambda\}$ . Mais, la proposition 5.13 montre que

$$\{\sigma_c\sigma_{(n)} \mid \lambda(c) = \lambda\} = \{\sigma_{(n)}\sigma_c \mid \lambda(c) = \lambda\},$$

ce qui implique que  $\sigma \in \{\sigma_{(n)}\sigma_c \mid \lambda(c) = \lambda\}$ . Par conséquent,  $\sigma = \sigma_{(n)}\sigma_c$  où  $c$  est une composition de  $n$  telle que  $\lambda(c) = \lambda$ .

(b)  $\Rightarrow$  (a) :

Soient  $c = (c_1, \dots, c_k)$  une composition de  $n$  telle que  $\lambda(c) = \lambda$  et  $\sigma = \sigma_{(n)}\sigma_c$ . Remarquons que d'après la proposition 5.13, on a :

$$\begin{aligned} \sigma\sigma_{(n)} &= (\sigma_{(n)}\sigma_c)\sigma_{(n)} \\ &= \sigma_{(n)}(\sigma_c\sigma_{(n)}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma\sigma_{(n)} &= \sigma_{(n)}(\sigma_c)^* \\
&= \sigma_{(n)}(\sigma_{(c_1, c_2, \dots, c_{k-1}, c_k)})^* \\
&= \sigma_{(n)}(\sigma_{(n)}\sigma_{(c_k, c_{k-1}, \dots, c_2, c_1)}) \\
&= \sigma_{(c_k, c_{k-1}, \dots, c_2, c_1)},
\end{aligned}$$

car  $\sigma_{(n)}$  est une involution. Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned}
P(\sigma\sigma_{(n)}) &= P(\sigma_{(c_k, c_{k-1}, \dots, c_2, c_1)}) \\
&= Q(\sigma_{(c_k, c_{k-1}, \dots, c_2, c_1)}) \text{ (car } \sigma_{(c_k, c_{k-1}, \dots, c_2, c_1)} \text{ est une involution)} \\
&= Q(\sigma\sigma_{(n)}) \\
&= Q(\sigma^*) \\
&= Q_{V,R}^T(\sigma).
\end{aligned}$$

Montrons que  $T = Q_{V,R}^T(\sigma) = P(\sigma\sigma_{(n)})$  est un tableau lisible par colonnes de forme  $\lambda^t$ . En utilisant la proposition 5.7, il suffit de montrer que  $T = P(\sigma_{c'}) = Q(\sigma_{c'})$  pour une certaine composition  $c'$  de  $n$  telle que  $\lambda(c') = \lambda$ . En effet,

$$\begin{aligned}
\sigma &= \sigma_{(n)}\sigma_c \\
&= \left( \left( (\sigma_c)^{-1} \right)^* \right)^{-1} \\
&= \left( (\sigma_c)^* \right)^{-1} \text{ (car } \sigma_c \text{ est une involution),}
\end{aligned}$$

ce qui implique que  $\sigma^{-1} = (\sigma_c)^*$ . Ainsi, en utilisant les résultats des propositions 5.12 et 5.13, on obtient

$$\begin{aligned}
T &= Q_{V,R}^T(\sigma) \\
&= P(\sigma\sigma_{(n)}) \\
&= P(\sigma^*) \\
&= P^T(\sigma) \\
&= Q^T(\sigma^{-1}) \\
&= Q^T((\sigma_c)^*) \\
&= \left( Q \left( (\sigma_{(c_1, c_2, \dots, c_{k-1}, c_k)})^* \right) \right)^T \\
&= \left( Q(\sigma_{(n)}\sigma_{(c_k, c_{k-1}, \dots, c_2, c_1)}) \right)^T \\
&= \left( Q^T(\sigma_{(c_k, c_{k-1}, \dots, c_2, c_1)}) \right)^T \\
&= Q(\sigma_{(c_k, c_{k-1}, \dots, c_2, c_1)}).
\end{aligned}$$

Posons  $c' = (c_k, c_{k-1}, \dots, c_2, c_1)$ , alors  $c'$  est une composition de  $n$  telle que  $\lambda(c') = \lambda(c) = \lambda$  et  $T = Q(\sigma_{c'})$ . Comme  $\sigma_{c'}$  est une involution, alors  $T = P(\sigma_{c'}) = Q(\sigma_{c'})$ , ce qui termine la preuve de cette proposition.

La proposition 5.16 montre que les ensembles

$$X = \{\sigma_{(n)}\sigma_c \mid \lambda(c) = \lambda\}$$

et

$$Y = \{\sigma \mid Q_{V,R}^T(\sigma) = P(\sigma\sigma_{(n)}) \text{ est un tableau lisible par colonnes de forme } \lambda^t\}$$

sont le même ensemble, i.e.  $X = Y$ .

Du corollaire 5.15 et de la proposition 5.13, on peut déduire que

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\max}^\lambda &= \{\sigma_c\sigma_{(n)} \mid \lambda(c) = \lambda\} \\ &= \{(\sigma_c)^* \mid \lambda(c) = \lambda\}. \end{aligned}$$

**Preuve** (du corollaire 5.15)

D'après le théorème 5.8, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\min}^{\lambda^t} &= \{\sigma_c \mid \lambda(c) = (\lambda^t)^t\} \\ &= \{\sigma_c \mid \lambda(c) = \lambda\} \\ &= \{\sigma_T \mid T \text{ est un tableau lisible par colonnes de forme } \lambda^t\}. \end{aligned}$$

D'après la proposition 5.11, on a

$$\sigma_{(n)}\mathcal{T}^\lambda = \mathcal{T}^{\lambda^t},$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} \sigma_{(n)}\mathcal{T}^{\lambda^t} &= \sigma_{(n)}(\sigma_{(n)}\mathcal{T}^\lambda) \\ &= (\sigma_{(n)})^{-1}(\sigma_{(n)}\mathcal{T}^\lambda) \text{ (car } \sigma_{(n)} \text{ est une involution)} \\ &= \left((\sigma_{(n)})^{-1}\sigma_{(n)}\right)\mathcal{T}^\lambda \\ &= \mathcal{T}^\lambda. \end{aligned}$$

Ainsi chaque  $\sigma$  dans  $\mathcal{T}^\lambda$  s'écrit

$$\sigma = \sigma_{(n)}\tau$$

où  $\tau \in \mathcal{T}^{\lambda'}$ , ce qui implique, d'après la proposition 5.14, que

$$\begin{aligned}\ell(\sigma) &= \ell(\sigma_{(n)}\tau) \\ &= \binom{n}{2} - \ell(\tau).\end{aligned}$$

Donc,  $\sigma$  de  $\mathcal{T}^\lambda$  est de longueur maximale si et seulement si  $\tau$  de  $\mathcal{T}^{\lambda'}$  est de longueur minimale, i.e.

$$\sigma = \sigma_{(n)}\tau \in \mathcal{T}_{\max}^\lambda \text{ si et seulement si } \tau \in \mathcal{T}_{\min}^{\lambda'}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\max}^\lambda &= \sigma_{(n)}\mathcal{T}_{\min}^{\lambda'} \\ &= \sigma_{(n)}\{\sigma_c \mid \lambda(c) = \lambda\} \\ &= \{\sigma_{(n)}\sigma_c \mid \lambda(c) = \lambda\} \\ &= \{d_c \mid \lambda(c) = \lambda\}.\end{aligned}$$

De même, d'après la proposition 5.11, on a

$$\mathcal{T}^\lambda \sigma_{(n)} = \mathcal{T}^{\lambda'},$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^{\lambda'} \sigma_{(n)} &= (\mathcal{T}^\lambda \sigma_{(n)}) \sigma_{(n)} \\ &= (\mathcal{T}^\lambda \sigma_{(n)}) (\sigma_{(n)})^{-1} \text{ (car } \sigma_{(n)} \text{ est une involution)} \\ &= \mathcal{T}^\lambda (\sigma_{(n)} (\sigma_{(n)})^{-1}) \\ &= \mathcal{T}^\lambda.\end{aligned}$$

Ainsi chaque  $\sigma$  dans  $\mathcal{T}^\lambda$  s'écrit

$$\sigma = \tau \sigma_{(n)} = \tau^*$$

où  $\tau \in \mathcal{T}^{\lambda'}$ , ce qui implique, d'après la proposition 5.14, que

$$\begin{aligned}
\ell(\sigma) &= \ell(\tau\sigma_{(n)}) \\
&= \ell(\tau^*) \\
&= \binom{n}{2} - \ell(\tau).
\end{aligned}$$

Donc,  $\sigma$  de  $\mathcal{T}^\lambda$  est de longueur maximale si et seulement si  $\tau$  de  $\mathcal{T}^{\lambda^t}$  est de longueur minimale, i.e.

$$\sigma = \tau\sigma_{(n)} \in \mathcal{T}_{\max}^\lambda \text{ si et seulement si } \tau \in \mathcal{T}_{\min}^{\lambda^t}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{\max}^\lambda &= \mathcal{T}_{\min}^{\lambda^t}\sigma_{(n)} \\
&= \{\sigma_c \mid \lambda(c) = \lambda\} \sigma_{(n)} \\
&= \{\sigma_c\sigma_{(n)} \mid \lambda(c) = \lambda\} \\
&= \{(\sigma_c)^* \mid \lambda(c) = \lambda\}.
\end{aligned}$$

D'après la proposition 5.16, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{\max}^\lambda &= \{\sigma_{(n)}\sigma_c \mid \lambda(c) = \lambda\} \\
&= \{\sigma \mid Q_{V,R}^T(\sigma) = P(\sigma\sigma_{(n)}) \text{ est un tableau lisible par colonnes de forme } \lambda^t\}.
\end{aligned}$$

Remarquons que

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{\max}^\lambda &= \mathcal{T}_{\min}^{\lambda^t}\sigma_{(n)} \\
&= \{\sigma_T \mid T \text{ est un tableau lisible par colonnes de forme } \lambda^t\} \sigma_{(n)} \\
&= \{\sigma_T\sigma_{(n)} \mid T \text{ est un tableau lisible par colonnes de forme } \lambda^t\} \\
&= \{(\sigma_T)^* \mid T \text{ est un tableau lisible par colonnes de forme } \lambda^t\}.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
T &= P(\sigma_T) \\
&= P^T((\sigma_T)^*) \\
&= Q(\sigma_T) \text{ (car } \sigma_T \text{ est une involution)} \\
&= Q_{V,R}^T((\sigma_T)^*),
\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{\max}^{\lambda} &= \{(\sigma_T)^* \mid T \text{ est un tableau lisible par colonnes de forme } \lambda^t\} \\
 &= \left\{ (\sigma_T)^* \mid Q_{V,R}^T((\sigma_T)^*) = P^T((\sigma_T)^*) \text{ est un tableau lisible par} \right. \\
 &\quad \left. \text{colonnes de forme } \lambda^t \right\} \\
 &= \left\{ (\sigma_T)^* \mid Q_{V,R}^T((\sigma_T)^*) = P\left((\sigma_T)^*\right)^* \text{ est un tableau lisible par} \right. \\
 &\quad \left. \text{colonnes de forme } \lambda^t \right\} \\
 &= \left\{ (\sigma_T)^* \mid Q_{V,R}^T((\sigma_T)^*) = P((\sigma_T)^* \sigma_{(n)}) \text{ est un tableau lisible par} \right. \\
 &\quad \left. \text{colonnes de forme } \lambda^t \right\} \\
 &= \{\sigma \mid Q_{V,R}^T(\sigma) = P(\sigma \sigma_{(n)}) \text{ est un tableau lisible par colonnes de forme } \lambda^t\}
 \end{aligned}$$

### 5.3 Conséquences du résultat principal

Soit  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$  un partage de l'entier  $n$  où  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_p > 0$ . Pour tout  $i > 0$ , définissons

$$m_i(\lambda) = |\{j \mid \lambda_j = i\}|,$$

i.e.  $m_i(\lambda)$  est le nombre de parts de  $\lambda$  de taille  $i$ . En d'autres mots  $m_i(\lambda)$  est la multiplicité de la part  $i$  dans  $\lambda$ . Puisque  $\sum_{i=1}^p \lambda_i = n$ , alors

$$m_i(\lambda) = 0 \text{ pour tout } i > n.$$

Par exemple pour

$$\lambda = 331 = 1^1 3^2 = 1^1 2^0 3^2 4^0 \dots,$$

on a :

$$m_1(\lambda) = 1, m_2(\lambda) = 0, m_3(\lambda) = 2 \text{ et } m_k(\lambda) = 0 \text{ pour tout } k \geq 4.$$

Rappelons que le coefficient multinomial

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k}$$

donne le nombre d'éléments de l'ensemble

$$\left\{ (B_1, \dots, B_k) \mid B_i \subseteq A, B_i \cap B_j = \emptyset \text{ si } i \neq j, \bigcup B_i = A \text{ et } |B_i| = n_i \right\},$$

où  $A$  est un ensemble à  $n$  éléments. Autrement dit, c'est le nombre de façons de placer  $n$  objets distincts dans  $k$  cellules distinctes où la  $i$ -ème cellule reçoit  $n_i$  objets, et c'est encore le nombre d'anagrammes de mots de longueur  $n$  ayant  $n_i$  fois la  $i$ -ème lettre.

Par exemple, le nombre d'anagrammes de mots de longueur 5 ayant 3 fois la lettre  $a$  et 2 fois la lettre  $b$  est

$$\begin{aligned} \binom{5}{3,2} &= \frac{5!}{3! \cdot 2!} \\ &= \frac{120}{6 \cdot 2} \\ &= 10. \end{aligned}$$

Remarquons que l'ensemble d'anagrammes de mots de longueur 5 ayant 3 fois la lettre  $a$  et 2 fois la lettre  $b$  est

$$\{aaabb, aabab, abaab, baaab, aabba, ababa, baaba, abbaa, babaa, bbaaa\},$$

et il est de cardinalité 10.

### Proposition 5.17

Le nombre de compositions  $c$  de  $n$  telles que  $\lambda(c) = \lambda$  est

$$\binom{m_1(\lambda) + \dots + m_n(\lambda)}{m_1(\lambda), \dots, m_n(\lambda)},$$

i.e.

$$|\{c \mid \lambda(c) = \lambda\}| = \binom{m_1(\lambda) + \dots + m_n(\lambda)}{m_1(\lambda), \dots, m_n(\lambda)}.$$

### Preuve

Comme une composition  $c$  associée au partage  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$  de l'entier  $n$ , i.e. une composition  $c$  telle que  $\lambda(c) = \lambda$ , peut être identifiée à un mot de longueur  $(m_1(\lambda) + \dots + m_n(\lambda))$  en les lettres  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  tel que le nombre d'occurrences de la lettre  $i$  dans  $c$  est égal à  $m_i(\lambda)$ , alors le nombre de compositions associées à  $\lambda$  est le nombre d'anagrammes de mots de longueur  $(m_1(\lambda) + \dots + m_n(\lambda))$  ayant  $m_i(\lambda)$  fois la  $i$ -ème lettre  $i$ , i.e. est le coefficient multinomial

$$\binom{m_1(\lambda) + \dots + m_n(\lambda)}{m_1(\lambda), \dots, m_n(\lambda)}.$$

Par conséquent, on peut déduire les corollaires suivants :

**Corollaire 5.18**

*Soit  $\lambda$  un partage de  $n$ , alors*

$$|\mathcal{T}_{\min}^{\lambda}| = \binom{m_1(\lambda') + \dots + m_n(\lambda')}{m_1(\lambda'), \dots, m_n(\lambda')},$$

*qui est le nombre de compositions  $c$  de  $n$  telles que  $\lambda(c) = \lambda'$ .*

**Preuve**

D'après le théorème 5.8 et la proposition 5.17, on a :

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}_{\min}^{\lambda}| &= |\{\sigma_c \mid \lambda(c) = \lambda'\}| \\ &= |\{c \mid \lambda(c) = \lambda'\}| \\ &= \binom{m_1(\lambda') + \dots + m_n(\lambda')}{m_1(\lambda'), \dots, m_n(\lambda')}. \end{aligned}$$

Les éléments minimales dans une cellule bilatère sont liés à un autre nombre important en combinatoire, à savoir (voir [Mcd79], p.2-3)

$$n(\lambda) = \sum_{i=1}^k \binom{\lambda'_i}{2}$$

où  $\lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_k)$  est le partage conjugué de  $\lambda$ .

**Corollaire 5.19**

*Soit  $\lambda$  un partage de  $n$  et soit  $\lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_k)$  son conjugué. Alors*

$$\ell(\sigma) = n(\lambda) \text{ pour tout } \sigma \in \mathcal{T}_{\min}^{\lambda}.$$

**Preuve**

Soit  $c$  une composition de  $n$  telle que  $\lambda(c) = \lambda'$ . Alors

$$\ell(\sigma_c) = \ell(\sigma_{\lambda'})$$



car  $\sigma_c$  et  $\sigma_{\lambda'}$  sont deux éléments dans  $\mathcal{T}_{\min}^\lambda$ , i.e. deux éléments de la même longueur minimale.

Soit  $\sigma_i$  l'élément de longueur maximale dans le sous-groupe de Young  $\mathcal{S}_{\lambda'_i}$ , ainsi d'après la proposition 5.1

$$\ell(\sigma_i) = \binom{\lambda'_i}{2}.$$

Par conséquent,

$$\ell(\sigma_{\lambda'}) = \sum_{i=1}^k \binom{\lambda'_i}{2},$$

car  $\sigma_{\lambda'} = \sigma_1 \dots \sigma_k$  (vu comme un mot en les lettres  $1, \dots, n$ ) et les lettres dans  $\sigma_{i+1}$  sont plus grandes que les lettres dans  $\sigma_i$ .

Du corollaire 5.15, on peut déduire les corollaires suivants :

#### Corollaire 5.20

Soit  $\lambda$  un partage de  $n$ , alors

$$|\mathcal{T}_{\max}^\lambda| = \binom{m_1(\lambda) + \dots + m_n(\lambda)}{m_1(\lambda), \dots, m_n(\lambda)},$$

qui est le nombre de compositions  $c$  de  $n$  telles que  $\lambda(c) = \lambda$ .

#### Preuve

D'après le corollaire 5.15 et la proposition 5.17, on a :

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}_{\max}^\lambda| &= |\{(\sigma_c)^* \mid \lambda(c) = \lambda\}| \\ &= |\{c \mid \lambda(c) = \lambda\}| \\ &= \binom{m_1(\lambda) + \dots + m_n(\lambda)}{m_1(\lambda), \dots, m_n(\lambda)}. \end{aligned}$$

#### Corollaire 5.21

Soit  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$  un partage de  $n$ . Alors, pour tout  $\sigma \in \mathcal{T}_{\max}^\lambda$ , on a :

$$\begin{aligned} \ell(\sigma) &= \binom{n}{2} - n(\lambda') \\ &= \binom{n}{2} - \sum_{i=1}^p \binom{\lambda_i}{2} \end{aligned}$$

#### Preuve

Comme  $\sigma \in \mathcal{T}_{\max}^\lambda$ , alors d'après le corollaire 5.12  $\sigma = \sigma_{(n)}\sigma_c$  pour une certaine composition  $c$  de

$n$  telle que  $\lambda(c) = \lambda$ . Comme  $\ell(\sigma_{(n)}) = \binom{n}{2}$  et  $\ell(\sigma_{(n)}\sigma) = \ell(\sigma_{(n)}) - \ell(\sigma)$ , pour tout  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ , alors

$$\begin{aligned}\ell(\sigma) &= \ell(\sigma_{(n)}\sigma_c) \\ &= \ell(\sigma_{(n)}) - \ell(\sigma_c) \\ &= \binom{n}{2} - \ell(\sigma_\lambda)\end{aligned}$$

car  $(\sigma_c)^*$  et  $(\sigma_\lambda)^*$  sont deux éléments dans  $\mathcal{T}_{\max}^\lambda$ , i.e. deux éléments de la même longueur maximale. Donc

$$\ell((\sigma_c)^*) = \ell((\sigma_\lambda)^*),$$

i.e.

$$\binom{n}{2} - \ell(\sigma_c) = \binom{n}{2} - \ell(\sigma_\lambda)$$

ce qui implique que

$$\ell(\sigma_c) = \ell(\sigma_\lambda).$$

Soit  $\sigma_i$  l'élément de longueur maximale dans le sous-groupe de Young  $\mathcal{S}_{\lambda_i}$ , ainsi d'après la proposition 5.1

$$\ell(\sigma_i) = \binom{\lambda_i}{2}.$$

Par conséquent,

$$\ell(\sigma_\lambda) = \sum_{i=1}^p \binom{\lambda_i}{2},$$

car  $\sigma_\lambda = \sigma_1 \dots \sigma_k$  (vu comme un mot en les lettres  $1, \dots, n$ ) et les lettres dans  $\sigma_{i+1}$  sont plus grandes que les lettres dans  $\sigma_i$ .

## 5.4 Démonstration du théorème principal

La proposition 5.7 montre que

$$\{\sigma_c \mid \lambda(c) = \lambda^t\} = \{\sigma_T \mid T \text{ est un tableau lisible par colonnes de forme } \lambda\}.$$

Ainsi, il suffit de montrer que

$$\mathcal{T}_{\min}^\lambda = \{\sigma_c \mid \lambda(c) = \lambda^t\}$$

pour terminer la démonstration du théorème 5.8.

Dans la suite de ce chapitre, nous allons utiliser les permutations soit comme des mots en les lettres  $1, \dots, n$ , soit comme des produits de transpositions. Dénotons par  $\leq$  l'ordre de Bruhat dans  $S_n$  (voir Chapitre 1, Remarque 1.27). Soit  $q^{\frac{1}{2}}$  une indéterminée et soit  $\mathcal{A} = \mathbb{Z} \left[ q^{\frac{1}{2}}, q^{-\frac{1}{2}} \right]$  l'anneau des polynômes de Laurent en  $q^{\frac{1}{2}}$ . Dénotons par  $\mathcal{H}$ , l'algèbre de Hecke (de type  $A$ ) sur  $\mathcal{A}$ , correspondant à  $S_n$ .

Soit  $\sigma_i = (i, (i+1))$  une transposition élémentaire. On pose  $T_{\sigma_i} = T_i$  et en général pour tout  $w \in S_n$ , il existe un élément  $T_w \in \mathcal{H}$ , bien défini, tel que  $T_w = T_{i_1} \dots T_{i_k}$  où  $w = \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_k}$  est une décomposition réduite de la permutation  $w$  de  $S_n$ . Notons que si  $\sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_k}$  et  $\sigma_{j_1} \dots \sigma_{j_r}$  sont deux décompositions réduites de  $w$ , alors  $T_{i_1} \dots T_{i_k} = T_{j_1} \dots T_{j_r}$ . Ainsi  $T_w$  est l'élément de  $\mathcal{H}$  obtenu en prenant le produit des  $T_i$  correspondants à une décomposition réduite quelconque de la permutation  $w$  de  $S_n$  (l'élément  $T_w$  ne dépend pas du choix de la décomposition réduite de la permutation  $w$  de  $S_n$ ).

Notons que  $\mathcal{H}$  est une  $\mathcal{A}$ -algèbre qui est engendrée par les  $(n-1)$  générateurs  $(T_i)_{i=1, \dots, n-1}$  soumis aux relations suivantes :

$$\begin{cases} T_i^2 = 1 & \text{pour } i \in \{1, 2, \dots, n-1\}, \\ T_i T_j = T_j T_i & \text{pour } |i-j| > 1, \\ T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1} & \text{pour } i \in \{1, 2, \dots, n-2\}. \end{cases}$$

Comme un  $\mathcal{A}$ -module, l'algèbre de Hecke  $\mathcal{H}$  est un module libre avec la base  $(T_\sigma)_{\sigma \in S_n}$  (la base standard indexée par les éléments de  $S_n$ ) et il possède aussi une autre base  $(\tilde{T}_\sigma)_{\sigma \in S_n}$  définie comme suit :

$$\tilde{T}_\sigma = q^{-\ell(\sigma)/2} T_\sigma \text{ pour tout } \sigma \in S_n,$$

où  $\ell(\sigma)$  désigne la longueur de  $\sigma$ .

Dans [KL79, théorème 1.1], Kazhdan et Lusztig ont montré qu'il existe une base  $(b_\sigma)_{\sigma \in S_n}$  de  $\mathcal{H}$ , appelée la base de Kazhdan-Lusztig, telle que

$$b_\sigma = \sum_{w \leq \sigma} (-1)^{\ell(\sigma) - \ell(w)} q^{(\ell(\sigma) - \ell(w))/2} P_{w, \sigma} (q^{-1}) \tilde{T}_w,$$

où  $P_{w, \sigma} \in \mathcal{A}$  sont les polynômes de Kazhdan-Lusztig.

Lusztig a défini pour tous  $x, y, z \in S_n$ , un certain élément  $h_{x,y,z}$  dans  $\mathcal{A}$  tel que

$$b_x b_y = \sum_{z \in S_n} h_{x,y,z} b_z.$$

Dénotons  $\delta(\sigma)$  le degré du polynôme de Kazhdan-Lusztig  $P_{e,\sigma}$  comme un polynôme en  $q$  où  $e$  dénote l'élément neutre du groupe  $S_n$ .

**Définition 5.22**

Posons  $\mathcal{A}^+ = \mathbb{Z} \left[ q^{\frac{1}{2}} \right]$ . Soit  $\sigma \in S_n$ , alors  $a(\sigma)$  est défini comme étant le plus petit entier tel que pour tous  $x, y \in S_n$ ,  $u^{a(\sigma)} h_{x,y,\sigma} \in \mathcal{A}^+$  où  $u = q^{\frac{1}{2}}$ .

Dans [Lu86, Lu87], Lusztig a montré que la fonction  $a$  vérifie quelques propriétés.

**Théorème 5.23**

La fonction  $a : S_n \rightarrow \mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$  vérifie les propriétés suivantes :

- (a)  $a(\sigma) \leq \ell(\sigma) - 2\delta(\sigma)$  ;
- (b) la fonction  $a$  est constante sur chaque cellule bilatère ;
- (c) pour tout  $I \subseteq S$ ,  $a(\sigma_{c_I}) = \ell(\sigma_{c_I})$ . En d'autres mots, pour toute composition  $c$  de  $n$ ,  $a(\sigma_c) = \ell(\sigma_c)$  ([Lu87, Proposition 1.4]) ;
- (d) Soit  $\mathcal{D} = \{\sigma \in S_n \mid a(\sigma) = \ell(\sigma) - 2\delta(\sigma)\}$ , alors chaque élément dans  $\mathcal{D}$  est une involution.

De ce théorème, on peut déduire le corollaire suivant qui donne la valeur de la fonction  $a$  sur toutes les cellules bilatères de  $S_n$ .

**Corollaire 5.24**

Soit  $\lambda$  un partage de  $n$  et  $\mathcal{T}^\lambda$  sa cellule bilatère associée, alors

$$a(\sigma) = \sum_{i=1}^k \binom{\lambda_i^t}{2} \text{ pour tout } \sigma \in \mathcal{T}^\lambda,$$

où  $\lambda^t = (\lambda_1^t, \dots, \lambda_k^t)$  est le partage conjugué de  $\lambda$ .

### Preuve

Comme la fonction  $a$  est constante sur chaque cellule bilatère  $\mathcal{T}^\lambda$ , alors

$$a(\sigma) = a(\sigma_c) \text{ pour tout } \sigma \in \mathcal{T}^\lambda \text{ et pour tout } \sigma_c \in \mathcal{T}_{\min}^\lambda.$$

En utilisant la propriété (c) et le corollaire 5.18, on obtient pour tout  $\sigma \in \mathcal{T}^\lambda$

$$\begin{aligned} a(\sigma) &= a(\sigma_c) \\ &= \ell(\sigma_c) \\ &= n(\lambda) \\ &= \sum_{i=1}^k \binom{\lambda'_i}{2}. \end{aligned}$$

Maintenant, nous allons continuer la preuve du théorème 5.8. En effet, soit  $\lambda$  un partage de  $n$  et  $\mathcal{T}^\lambda$  sa cellule bilatère associée, i.e.  $\mathcal{T}^\lambda$  est le tapis constitué de toutes les permutations de  $\mathcal{S}_n$  de forme  $\lambda$ . Le fait que  $\sigma_{\lambda'} \in \mathcal{T}^\lambda$ , car  $\sigma_{\lambda'}$  est une permutation de forme  $\lambda$ , et d'après la propriété (b), on obtient

$$a_\lambda := a(\sigma_{\lambda'}) = a(\sigma) \text{ pour tout } \sigma \in \mathcal{T}^\lambda.$$

Comme  $\delta(\sigma) \geq 0$  pour tout  $\sigma \in \mathcal{T}^\lambda$  et d'après la propriété (a), on obtient

$$a_\lambda = a(\sigma) \leq \ell(\sigma) - 2\delta(\sigma) \leq \ell(\sigma) \text{ pour tout } \sigma \in \mathcal{T}^\lambda.$$

Soit  $c$  une composition de  $n$  telle que  $\lambda(c) = \lambda^t$ . le fait que  $\sigma_c \in \mathcal{T}^\lambda$  et d'après la propriété (c)

$$\ell(\sigma_c) = a(\sigma_c) = a_\lambda = a(\sigma) \leq \ell(\sigma) \text{ pour tout } \sigma \in \mathcal{T}^\lambda.$$

Par conséquent,

$$\ell(\sigma_c) \leq \ell(\sigma) \text{ pour tout } \sigma \in \mathcal{T}^\lambda,$$

ainsi  $\sigma_c$  est de longueur minimale, i.e.  $\sigma_c \in \mathcal{T}_{\min}^\lambda$  et donc

$$\{\sigma_c \mid \lambda(c) = \lambda^t\} \subseteq \mathcal{T}_{\min}^\lambda.$$

Pour terminer la preuve du théorème 5.8, il reste à montrer que

$$\mathcal{T}_{\min}^\lambda \subseteq \{\sigma_c \mid \lambda(c) = \lambda^t\}.$$

Soit  $\sigma \in \mathcal{T}_{\min}^\lambda$ . Puisque  $\sigma_{\lambda'} \in \mathcal{T}_{\min}^\lambda$ , alors

$$a(\sigma) = a_\lambda = \ell(\sigma_{\lambda'}) = \ell(\sigma) = \ell(\sigma) - 2(0)$$

car  $\sigma_{\lambda'}$  et  $\sigma$  sont de la même longueur minimale. D'après la propriété (d), on peut déduire que  $\sigma \in \mathcal{D}$  avec  $\delta(\sigma) = 0$ , ce qui implique que  $\sigma$  est une involution. Pour terminer la preuve du théorème 5.8, il suffit d'utiliser la proposition suivante :

**Proposition 5.25**

*Soit  $\sigma \in S_n$  une involution, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- i)  $\delta(\sigma) = 0$  ;
- ii)  $\sigma = \sigma_c$ , pour une certaine composition  $c$  de  $n$ .

Pour démontrer cette proposition, on a besoin de la définition suivante :

**Définition 5.26**

*On dit que la permutation  $\sigma \in S_n$ , vue comme un mot  $\sigma = x_1 x_2 \dots x_n$  en les lettres  $1, 2, \dots, n$ , évite le motif 4231 (resp. évite le motif 3412) s'il n'existe pas  $1 \leq i < j < k < l \leq n$  tels que  $x_l < x_j < x_k < x_i$  (resp.  $x_k < x_l < x_i < x_j$ ). En d'autres mots, il n'existe pas un sous-mot de  $\sigma$  avec le même ordre relatif au mot 4231 (resp. 3412).*

La proposition suivante montre que l'involution  $\sigma_c$  vérifie la propriété donnée dans la définition 5.26.

**Proposition 5.27**

*Soit  $c = (c_1, c_2, \dots, c_k)$  une composition de l'entier  $n$ . Alors l'involution  $\sigma_c$  évite les motifs 4231 et 3412.*

**Preuve**

Le cas  $n < 4$  est évident. Supposons que  $n \geq 4$  et montrons que  $\sigma_c$  évite les motifs 4231 et 3412.

La permutation

$$\sigma_c = \sigma_c(1) \sigma_c(2) \dots \sigma_c(n),$$

vue comme un mot de longueur  $n$  en les lettres  $1, 2, \dots, n$ , est définie comme le produit de juxtaposition

$$\sigma_c = w_1 w_2 \dots w_k,$$

avec

$$w_1 = u_1 (u_1 - 1) \dots 21,$$

et pour tout  $2 \leq j \leq k$ ,

$$w_j = u_j (u_j - 1) \dots (u_{j-1} + 2) (u_{j-1} + 1),$$

où pour tout  $1 \leq j \leq k$ ,

$$u_j = c_1 + c_2 + \dots + c_j.$$

Remarquons que pour tout  $1 \leq j \leq k$ ,  $w_j$  est un mot de longueur  $c_j$ . Remarquons aussi que les lettres de chaque mot  $w_j$  (vues comme des entiers dans  $[n]$ ) sont en ordre décroissant et que les lettres du mot  $w_j$  sont strictement plus grandes que celles du mot  $w_i$  pour tout  $1 \leq i < j$ .

Si on suppose le contraire, i.e. on suppose que  $\sigma_c$  n'évite pas le motif 4231 ou 3412, on aura une contradiction.

En effet, dans le cas où  $\sigma_c$  n'évite pas le motif 4231, il existe  $1 \leq i < j < p < l \leq n$  tels que  $\sigma_c(l) < \sigma_c(j) < \sigma_c(p) < \sigma_c(i)$ . Si  $\sigma_c(i)$  est une lettre d'un certain mot  $w_m$  où  $1 \leq m \leq k$ , alors la lettre  $\sigma_c(j)$ , située à droite de  $\sigma_c(i)$  dans le mot  $\sigma_c$ , est forcément une lettre du même mot  $w_m$  car  $\sigma_c(i) > \sigma_c(j)$  et les mots  $w_{m+1}, \dots, w_k$  ont des lettres strictement plus grandes que  $\sigma_c(i)$ . Comme la lettre  $\sigma_c(p)$  est située à droite de  $\sigma_c(j)$  dans le mot  $\sigma_c$  et comme  $\sigma_c(p) > \sigma_c(j)$ , alors  $\sigma_c(p)$  ne peut pas être une lettre du mot  $w_m$ ; elle est forcément une lettre d'un certain mot  $w_{m'}$  où  $m < m' \leq k$ . Comme  $\sigma_c(p)$  est une lettre du mot  $w_{m'}$  et comme la lettre  $\sigma_c(l)$  est située à droite de  $\sigma_c(p)$  dans le mot  $\sigma_c$ , alors  $\sigma_c(l)$  est forcément une lettre du même mot  $w_{m'}$  car  $\sigma_c(p) > \sigma_c(l)$  et les mots  $w_{m'+1}, \dots, w_k$  ont des lettres strictement plus grandes que  $\sigma_c(p)$ .

Maintenant,  $\sigma_c(i)$  et  $\sigma_c(j)$  sont des lettres du mot  $w_m$  et  $\sigma_c(p)$  et  $\sigma_c(l)$  sont des lettres du mot  $w_{m'}$  avec  $m < m'$ , ce qui implique que  $\sigma_c(l) > \sigma_c(i)$  car les lettres du mot  $w_{m'}$  sont strictement plus grandes que celles du mot  $w_m$ , ce qui donne une contradiction car  $\sigma_c(l) < \sigma_c(i)$ .

Dans le cas où  $\sigma_c$  n'évite pas le motif 3412, il existe  $1 \leq i < j < p < l \leq n$  tels que  $\sigma_c(p) < \sigma_c(l) < \sigma_c(i) < \sigma_c(j)$ . Si  $\sigma_c(i)$  est une lettre d'un certain mot  $w_m$  où  $1 \leq m \leq k$ , alors la lettre  $\sigma_c(p)$ , située à droite de  $\sigma_c(i)$  dans le mot  $\sigma_c$ , est forcément une lettre du même mot  $w_m$  car  $\sigma_c(i) > \sigma_c(p)$  et les mots  $w_{m+1}, \dots, w_k$  ont des lettres strictement plus grandes que  $\sigma_c(i)$ . Comme la lettre  $\sigma_c(j)$  est située à droite de  $\sigma_c(i)$  dans le mot  $\sigma_c$  et comme  $\sigma_c(j) > \sigma_c(i)$ , alors

$\sigma_c(j)$  ne peut pas être une lettre du mot  $w_m$  ; elle est forcément une lettre d'un certain mot  $w_{m'}$  où  $m < m' \leq k$ . Comme  $\sigma_c(j)$  est une lettre du mot  $w_{m'}$  et comme la lettre  $\sigma_c(l)$  est située à droite de  $\sigma_c(j)$  dans le mot  $\sigma_c$ , alors  $\sigma_c(l)$  est forcément une lettre du même mot  $w_{m'}$  car  $\sigma_c(j) > \sigma_c(l)$  et les mots  $w_{m'+1}, \dots, w_k$  ont des lettres strictement plus grandes que  $\sigma_c(j)$ .

Maintenant,  $\sigma_c(i)$  et  $\sigma_c(p)$  sont des lettres du mot  $w_m$  et  $\sigma_c(j)$  et  $\sigma_c(l)$  sont des lettres du mot  $w_{m'}$  avec  $m < m'$ , ce qui implique que  $\sigma_c(l) > \sigma_c(i)$  car les lettres du mot  $w_{m'}$  sont strictement plus grandes que celles du mot  $w_m$ , ce qui donne une contradiction car  $\sigma_c(l) < \sigma_c(i)$ .

La définition 5.26 est liée au polynômes de Kazhdan-Lusztig par le moyen du lemme suivant :

**Lemme 5.28**

*Soit  $w \in S_n$  une involution, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

iii)  $P_{e,w} = 1$

iv)  $w$  évite les motifs 4231 et 3412.

**Preuve**

La preuve de ce lemme découle directement du lien entre les polynômes de Kazhdan-Lusztig et les variétés de Schubert. En effet, d'une part, Lakshmibai et Sandhya [LaSa90] ont montré que la variété de Schubert  $X(w)$ ,  $w \in S_n$ , est lisse si et seulement si  $w$  évite les motifs 4231 et 3412 (voir aussi [BiLa00, Théorème 8.1.1]). D'autre part, Deodhar [Dh85] a utilisé les polynômes de Kazhdan-Lusztig pour montrer que la variété de Schubert  $X(w)$ ,  $w \in S_n$ , est lisse si et seulement si  $P_{e,w} = 1$ . Par conséquent, le lemme est démontré.

Il est clair que les conditions i) et iii) sont équivalentes puisque  $\delta(w)$  est, par définition, le degré du polynôme de Kazhdan-Lusztig  $P_{e,w}$ .

L'équivalence des conditions i) et iii) et celle des conditions iii) et iv) impliquent que les conditions i) et vi) sont équivalentes. Ainsi, pour démontrer la proposition 5.25, i.e. pour démontrer que les conditions i) et ii) sont équivalentes, il suffit de montrer que les conditions ii) et iv) sont équivalentes.

Nous allons utiliser la proposition suivante pour montrer l'implication vi)  $\Rightarrow$  ii)



**Proposition 5.29**

Soit  $\sigma = x_1 \dots x_n \in \mathcal{S}_n$  une involution. Si  $\sigma$  évite les motifs 4231 et 3412, alors

$$\text{soit } x_1 = 1 \text{ ou } x_1 = p > 1 \text{ et } x_i = p + 1 - i \text{ pour tout } 1 \leq i \leq p. \quad (*)$$

**Preuve**

Nous procédons par induction sur  $n$ . Le cas  $n = 1$  est trivial. Si  $n > 1$  et  $x_1 = p > 1$ , alors  $x_2 = x_1 - 1 = p - 1$ . En effet, si  $x_2 \neq p - 1$ , on peut distinguer les deux cas suivants :

(i) le cas  $x_2 < x_1$  : comme  $x_2 \neq x_1 - 1$ , alors l'ensemble  $H = \{x_2 + 1, \dots, x_1 - 1\}$  est non vide.

Ainsi il existe  $q \in H$  tel que

$$1 \leq x_2 < q < x_1 = p.$$

Comme  $\sigma$  est une involution,  $x_2 = 1$  implique que  $x_1 = 2 = p$  et donc  $x_2 = x_1 - 1 = p - 1$ .

Supposons maintenant que

$$1 < x_2 < q < x_1 = p.$$

Si  $x_q < p$ , alors  $1 < x_2 < q < p$  et  $x_p = 1 < x_{x_2} = 2 < x_q < x_1 = p$  car  $\sigma$  est une involution.

Par conséquent,  $\sigma$  évite le motif 4231, ce qui est une contradiction. Donc  $x_q > p$ . Ainsi  $1 < q < p < x_q$  et  $x_p = 1 < x_{x_q} = q < x_1 = p < x_q$  car  $\sigma$  est une involution. Par conséquent,  $\sigma$  évite le motif 3412, ce qui est une contradiction.

(ii) le cas  $x_2 > x_1$  : on a  $1 < 2 < p < x_2$  et  $x_p = 1 < x_{x_2} = 2 < x_1 = p < x_2$  car  $\sigma$  est une involution. Par conséquent,  $\sigma$  évite le motif 3412, ce qui est une contradiction.

Comme les deux cas précédents donnent des contradictions, alors  $x_2 = x_1 - 1$ . Soit  $\sigma'$  la permutation en les lettres  $2, \dots, p - 1, p + 1, \dots, n$  obtenue en supprimant le cycle  $(1 \ p)$ . Ainsi  $\sigma'$  est une involution qui est un mot d'une longueur plus petite que  $n - 1$ . Par induction, on a

$$\sigma' = (p - 1)(p - 2) \dots 2x_{p+1} \dots x_n.$$

par conséquent,

$$\sigma = p(p - 1)(p - 2) \dots 21x_{p+1} \dots x_n$$

et (\*) est démontrée.

**Preuve (de la proposition 5.25)**

Il suffit de montrer que les conditions ii) et iv) sont équivalentes. En effet,

ii)  $\Rightarrow$  iv) :

Cette implication découle directement de la proposition 5.27.

vi)  $\Rightarrow$  ii) :

Nous allons voir  $w = x_1 x_2 \dots x_n$  comme un mot en les lettres  $1, 2, \dots, n$ . Nous allons procéder par induction sur  $n$ . Par conséquent, nous pouvons supposer que vi)  $\Rightarrow$  ii) pour tous les sous-groupes de Young propres de  $\mathcal{S}_n$ . Si  $n \leq 4$ , notre résultat est facile à voir. Supposons que  $n > 4$ .

Si  $x_1 = 1$ , alors  $w \in \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_{n-1}$  et le lemme s'ensuit par induction.

Si  $n > x_1 = p > 1$ , alors, d'après la proposition 5.29,  $x_p = 1$  et  $1 \leq x_i \leq p$ , pour tout  $1 \leq i \leq p$ . Autrement, il existe  $1 < i < p$  tel que  $x_i > p$ . En d'autres mots, il existe  $1 < i < p < x_i$  tels que  $x_p = 1 < x_{x_i} = i < x_1 = p < x_i$ , ce qui signifie que  $w$  évite le motif 3412, ce qui est une contradiction. Par conséquent,  $w \in \mathcal{S}_p \times \mathcal{S}_{n-p}$  et le lemme s'ensuit par induction.

Si  $x_1 = n$ , alors, d'après la proposition 5.29,  $x_n = 1$  et il suffit de montrer que  $w = \sigma_{(n)}$ . Autrement, il existe  $1 < i < n - 1$  tel que  $x_i < x_{i+1}$  (remarquons que  $i \neq 1$  car si  $i = 1$ , alors  $x_i = x_1 = n < x_{i+1} = x_2$  qui est une contradiction car  $x_2 < n$  et  $i + 1 \neq n$  car si  $i + 1 = n$ , alors  $x_i = x_{n-1} < x_{i+1} = x_n = 1$  qui est une contradiction car  $x_{n-1} > 1$ ). Ainsi, il existe  $1 < i < i + 1 < n$  tels que  $x_n = 1 < x_{x_i} < x_{i+1} < x_1 = n$ , ce qui signifie que  $w$  évite le motif 4231, ce qui est une contradiction.

Nous allons poursuivre la preuve du théorème 5.8. En effet, il reste à montrer que

$$\mathcal{T}_{\min}^\lambda \subseteq \{\sigma_c \mid \lambda(c) = \lambda^t\}.$$

Soit  $\sigma \in \mathcal{T}_{\min}^\lambda$ . On a vu que  $\sigma$  est une involution et que  $\delta(\sigma) = 0$ . En utilisant la proposition 5.25, on obtient que  $\sigma = \sigma_c$  pour une certaine composition  $c$  de  $n$ . Montrons que  $\lambda(c) = \lambda^t$ . En effet, ceci découle directement du fait que  $\sigma_c = \sigma$  et que  $\sigma \in \mathcal{T}_{\min}^\lambda$  est une permutation de forme  $\lambda$ .

## CHAPITRE VI

### PERMUTATIONS MAXIMALES DANS UN TAPIS.

Dans ce chapitre, nous donnons une preuve combinatoire du résultat dû à Hohlweg qui caractérise les permutations ayant le nombre d'inversions maximal dans un tapis. Rappelons que Hohlweg a démontré ce résultat à l'aide de la théorie de Kazhdan-Lusztig. Notre preuve s'inspire directement de l'algorithme géométrique que Viennot avait construit pour la correspondance de Robinson-Schensted. Rappelons que Guo-Niu Han est le premier qui a montré, par un argument combinatoire, que la caractérisation de Hohlweg pour les permutations minimales est une conséquence de l'algorithme géométrique de Viennot. Notons que l'argument combinatoire utilisé dans ce chapitre est très similaire à celui de Guo-Niu Han.

Dans toute la suite de ce chapitre  $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p > 0)$  est un partage de l'entier  $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p$ . Soit  $\lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_k)$  son partage conjugué et soit  $\sigma$  une permutation de  $[n]$ , i.e. un élément du groupe symétrique  $\mathcal{S}_n$ . La permutation  $\sigma$  sera écrite comme un mot  $\sigma = \sigma(1) \sigma(2) \dots \sigma(n)$  en les lettres  $1, 2, \dots, n$ .

#### 6.1 Définitions et identités de base

La correspondance de Robinson-Schensted entre permutations et paires de tableaux de Young standards de même forme, se réalise par une suite d'insertions. Une description détaillée de cet algorithme est donnée au chapitre 2. Viennot a imaginé une version géométrique de la correspondance de Robinson-Schensted (Viennot, 96), et c'est justement cette approche géométrique de Viennot qui fournit l'outil combinatoire utilisé dans ce chapitre. Une description complète de cet algorithme est donnée au chapitre 3.

On appelle forme d'une permutation  $\sigma$  la forme commune des deux tableaux de Young standards

$P(\sigma)$  et  $Q(\sigma)$  associés à  $\sigma$  par la correspondance de Robinson-Schensted. Les permutations ayant le nombre d'inversions maximal sur l'ensemble des permutations de même forme sont dites *maximales*. Le but de ce chapitre est de caractériser les permutations maximales.

À toute composition  $c = (c_1, c_2, \dots, c_k)$  de  $n$ , on associe une permutation

$$\sigma_c = \sigma_c(1) \sigma_c(2) \dots \sigma_c(n),$$

un mot de longueur  $n$  en les lettres  $1, 2, \dots, n$ , définie comme le produit de juxtaposition

$$\sigma_c = w_1 w_2 \dots w_k,$$

avec

$$w_1 = u_1(u_1 - 1) \dots 21,$$

et pour tout  $2 \leq j \leq k$ ,

$$w_j = u_j(u_j - 1) \dots (u_{j-1} + 2)(u_{j-1} + 1),$$

où pour tout  $1 \leq j \leq k$ ,

$$u_j = c_1 + c_2 + \dots + c_j.$$

Par exemple, on a  $\sigma_{(3,2,2)} = 321 \cdot 54 \cdot 76 = 3215476$ . On vérifie bien que  $\sigma_c$ , vue comme l'application  $i \mapsto \sigma_c(i)$  ( $1 \leq i \leq n$ ), est une involution.

Rappelons qu'un tapis est l'ensemble de toutes les permutations de même forme. Dans un tapis, nous allons nous intéresser à des permutations particulières dites maximales.

Le but de ce chapitre est de caractériser les permutation maximales dans un tapis donné.

Rappelons que la permutation  $\sigma_c$  est de longueur  $\sum_{i=1}^k \binom{c_i}{2} = \frac{1}{2} \left( \left( \sum_{i=1}^k c_i^2 \right) - n \right)$ , i.e.

$$\text{inv}(\sigma_c) = \sum_{i=1}^k \binom{c_i}{2},$$

et que si la composition  $c = (c_1, c_2, \dots, c_k)$  de l'entier  $n$  est un réarrangement de  $\lambda^t = (\lambda_1^t, \dots, \lambda_k^t)$ , alors la permutation  $\sigma_c$  est de longueur  $n(\lambda)$ , i.e.

$$\text{inv}(\sigma_c) = n(\lambda),$$

ce qui implique que si la composition  $c = (c_1, c_2, \dots, c_k)$  de l'entier  $n$  est un réarrangement de  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ , alors la permutation  $\sigma_c$  est de longueur  $n(\lambda^t)$ , i.e.

$$\text{inv}(\sigma_c) = n(\lambda^t).$$

## 6.2 Théorème principal

Maintenant, nous allons donner la résultat principal de ce chapitre.

### Théorème 6.1

*Soit  $\lambda$  un partage de l'entier  $n$ . Alors l'ensemble des permutations maximales de forme  $\lambda$  est l'ensemble de toutes les permutations de type  $(\sigma_c)^*$  où  $c$  est un réarrangement de  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ .*

Le Théorème 6.1 est dû à Hohlweg (Hohlweg, 2005) qui l'a démontré en utilisant la théorie de Kazhdan-Lusztig (Kazhdan et Lusztig, 79). La démonstration combinatoire de ce résultat, donnée ci-après, s'inspire directement de l'algorithme géométrique de Viennot de la correspondance de Robinson-Schensted. On sait qu'il est facile de lire, à partir des tableaux associés, l'indice majeur de la permutation (Foata et Schützenberger, 78); cependant il est difficile de reconnaître le nombre d'inversions de cette manière. Néanmoins, l'algorithme de Viennot permet d'établir une relation d'*inégalité* entre le nombre d'inversions et la forme d'une permutation (bien qu'il soit difficile de reconnaître le nombre d'inversions et la forme d'une permutation), ce qui permet de résoudre le problème facilement.

### Exemple 6.2

Pour  $\lambda = 331$  un partage de 7. Les trois réarrangement de  $\lambda$  sont 331, 313 et 133. D'après le théorème 6.1, l'ensemble des permutations maximales de forme 331 est donc

$$\{(\sigma_{331})^*, (\sigma_{313})^*, (\sigma_{133})^*\},$$

avec

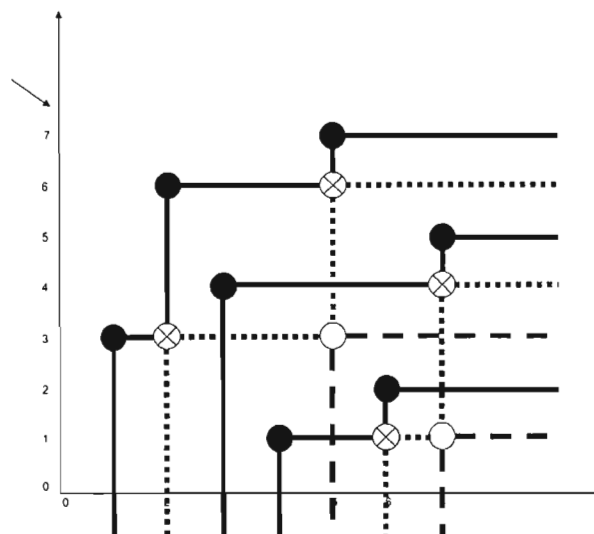
$$\begin{aligned} (\sigma_{331})^* &= (321 \cdot 654 \cdot 7)^* \\ &= (3216547)^* \\ &= 7456123, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\sigma_{313})^* &= (321 \cdot 4 \cdot 765)^* \\
 &= (3214765)^* \\
 &= 5674123,
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 (\sigma_{133})^* &= (1 \cdot 432 \cdot 765)^* \\
 &= (1432765)^* \\
 &= 5672341.
 \end{aligned}$$

Pour simplifier la preuve du théorème 6.1, on ne reproduit pas la description complète de l'algorithme de Viennot (Viennot, 76). On utilise les mêmes notations que lui, y compris son propre exemple illustratif. Pour la permutation  $\sigma = 3641725$ , les squelettes successifs supérieurs gauches de  $\sigma$  apparaissent dans la figure 6.1 ci-dessous.



**Figure 6.1** Les squelettes successifs supérieurs gauches de  $\sigma$

Rappelons que la fonction  $n(\lambda)$  est définie pour tout partage  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$  par (voir (Macdonald, 95))

$$n(\lambda) = \sum_{i=1}^p \binom{\lambda_i}{2},$$

où  $\lambda^t = (\lambda_1^t, \dots, \lambda_k^t)$  est le transposé de  $\lambda$ .

Notons  $SB_g^+(\sigma)$  l'ensemble des points blancs dans la figure 6.1 ci-dessous, i.e. l'union de tous les squelettes  $(Sq_g^+)^k(\sigma)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Le résultat suivant est alors évident.

### Lemme 6.3

Soit  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$  la forme de la permutation  $\sigma$  de  $S_n$  et soit  $\lambda^t$  le partage transposé de  $\lambda$ . Alors  $n(\lambda^t)$  est égal au cardinal de  $SB_g^+(\sigma)$  où  $n(\lambda^t) = \sum_{i=1}^p \binom{\lambda_i}{2}$ .

### Preuve

On sait que si  $\sigma$  est une permutation de  $S_n$  de forme  $\lambda$ , alors  $|SB_g^-(\sigma)| = n(\lambda)$  (voir Chapitre 4, Lemme 4.12). On sait aussi que si  $\sigma$  est une permutation de  $S_n$  de forme  $\lambda$ , alors la permutation  $\sigma^{-1}$  (l'inverse de  $\sigma$ ) est une permutation de  $S_n$  de forme  $\lambda$  et la permutation  $\sigma^*$  (l'image miroir de  $\sigma$ ) est une permutation de  $S_n$  de forme  $\lambda^t$ . Ainsi le fait que  $|SB_g^+(\sigma)| = |SB_g^-(\sigma^{-1})^*|$  implique que

$$\begin{aligned} |SB_g^+(\sigma)| &= |SB_g^-(\sigma^{-1})^*| \\ &= n(\lambda^t) \\ &= \sum_{i=1}^p \binom{\lambda_i}{2}. \end{aligned}$$

Dans la figure 6.2 ci-dessous, notons  $Rot(\sigma)$  l'ensemble des points blancs. Ce sont les points  $(x, y)$  tels qu'il existe deux autres points  $(x', y)$  et  $(x, y')$  de la permutation  $\sigma$  avec les conditions  $x' < x$  et  $y > y'$ . La figure 6.2 est appelée diagramme de Rothe. Une propriété tout à fait élémentaire du diagramme de Rothe est que le nombre d'inversions de la permutation est égal au cardinal de  $Rot(\sigma)$ , i.e.

$$\text{inv}(\sigma) = |Rot(\sigma)|.$$

Il est clair que  $SB_g^+(\sigma)$  et  $Rot(\sigma)$  sont deux ensembles disjoints comme on peut le voir en comparant les figures 6.1 et 6.2. On en déduit le lemme suivant :

### Lemme 6.4

Soit  $\lambda$  la forme de la permutation  $\sigma$ . Alors on a

$$\text{inv}(\sigma) \leq \binom{n}{2} - n(\lambda^t).$$

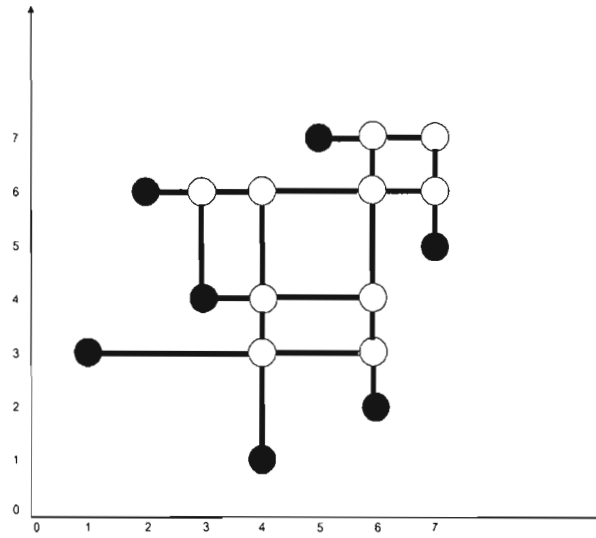


Figure 6.2 Le diagramme de Rothe d'une permutation et le nombre d'inversions.

### Preuve

Posons

$$\Gamma(\sigma) = \{(x, y) \in [n] \times [n] \mid y = \sigma(i) \text{ et } i < x \leq n \text{ pour un certain } i \in [n]\}.$$

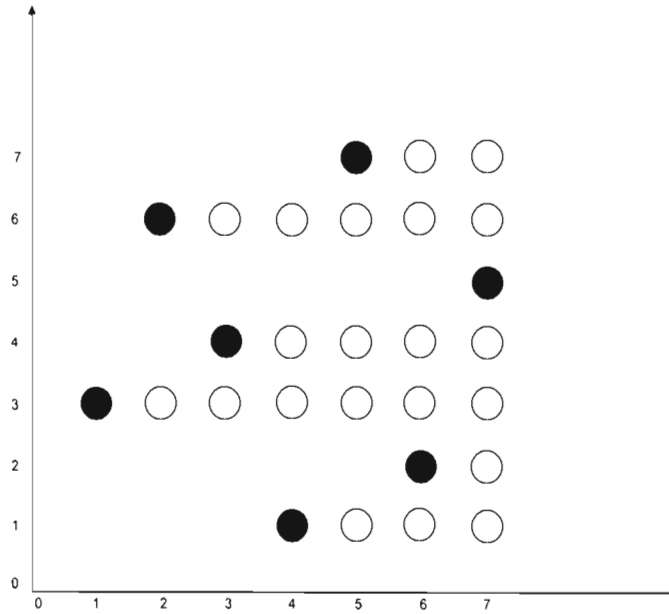
Par exemple,  $\Gamma(\sigma)$  pour  $\sigma = 3641725$  est l'ensemble des points blancs dans la figure 6.3 ci-dessous. On peut déduire facilement que, pour  $\sigma$  une permutation de  $S_n$ ,

$$\begin{aligned} |\Gamma(\sigma)| &= 0 + 1 + \dots + (n-1) \\ &= \frac{n}{2} (0 + (n-1)) \\ &= \frac{n(n-1)}{2} \\ &= \binom{n}{2}. \end{aligned}$$

Il est clair que  $SB_g^+(\sigma) \cap Rot(\sigma) = \emptyset$  et que  $SB_g^+(\sigma) \cup Rot(\sigma) \subseteq \Gamma(\sigma)$ . Par conséquent,

$$\begin{aligned} (|SB_g^+(\sigma) \cup Rot(\sigma)| \leq |\Gamma(\sigma)|) &\iff |SB_g^+(\sigma)| + |Rot(\sigma)| \leq |\Gamma(\sigma)| \\ &\iff n(\lambda^t) + \text{inv}(\sigma) \leq \binom{n}{2} \\ &\iff \text{inv}(\sigma) \leq \binom{n}{2} - n(\lambda^t). \end{aligned}$$





**Figure 6.3** L'ensemble  $\Gamma(\sigma)$

Pour tout réarrangement  $c$  de  $\lambda$ , la permutation  $(\sigma_c)^*$  est de forme  $\lambda$  et

$$\begin{aligned}
 \text{inv}((\sigma_c)^*) &= \ell((\sigma_c)^*) \\
 &= \binom{n}{2} - \ell(\sigma_c) \\
 &= \binom{n}{2} - \text{inv}(\sigma_c) \\
 &= \binom{n}{2} - n(\lambda^t),
 \end{aligned}$$

car  $\sigma_c$  est de forme  $\lambda^t$  et  $\text{inv}(\sigma_c) = n(\lambda^t)$ .

D'après le lemme 6.4,  $(\sigma_c)^*$  est une permutation maximale de forme  $\lambda$ . Montrons que toutes les permutations maximales sont de ce type. Un point  $(x, y)$  de la permutation  $\sigma$  est dit *saillant supérieur gauche* s'il n'y a pas de point  $(i, j)$  de la permutation tel que  $i \leq x$  et  $j \geq y$ . Deux points saillants supérieurs gauches  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$  sont dit consécutifs s'il n'y a pas de point saillant supérieur gauche  $(i, j)$  de la permutation tel que  $i$  est compris entre  $x_1$  et  $x_2$ .

### Lemme 6.5

Soit  $\sigma$  une permutation telle que

$$\text{inv}(\sigma) = \binom{n}{2} - n(\lambda^t). \quad (6.1)$$

Si  $a = (x_a, y_a)$  et  $b = (x_b, y_b)$  sont deux points saillants consécutifs de  $\sigma$  tels que  $x_b < x_a$ . Alors  $x_b = x_a - 1$  et  $y_b = y_a - 1$ .

### Preuve

Si la conclusion du lemme est fausse, il existe un point de la permutation  $c = (x_c, y_c)$  tel que  $x_b < x_c < x_a$ . Prenons pour  $y_c$  la plus grande valeur satisfaisant  $y_c < y_b$  et pour  $x_c$  la plus grande valeur satisfaisant  $x_c < x_a$ , comme illustré dans la figure 6.4 ci-dessous. On constate que le point  $d = (x_a, y_c)$  appartient à  $\Gamma(\sigma)$  mais pas à  $Rot(\sigma)$  et pas à  $SB_g^+(\sigma)$ . Ainsi, on aurait  $Rot(\sigma) \subsetneq \Gamma(\sigma) \setminus SB_g^+(\sigma)$ , i.e.

$$\begin{aligned} (\text{inv}(\sigma) = |Rot(\sigma)|) &< |\Gamma(\sigma) \setminus SB_g^+(\sigma)| \\ &= |\Gamma(\sigma)| - |SB_g^+(\sigma)| \\ &= \binom{n}{2} - n(\lambda^t). \end{aligned}$$

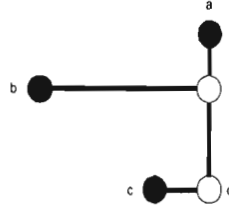


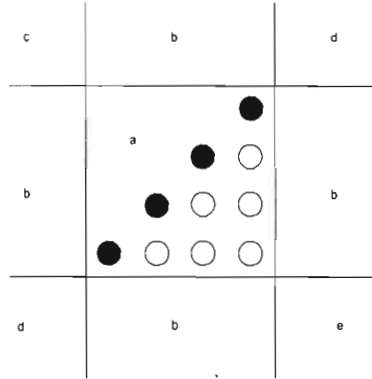
Figure 6.4 Comparaison entre  $SB(\sigma)$  et  $Rot(\sigma)$ .

## 6.3 Démonstration du théorème principal

Il suffit de montrer que si  $\sigma$  est une permutation maximale de forme  $\lambda$ , alors  $\sigma$  est de type  $(\sigma_c)^*$  où  $c$  est une composition de l'entier  $n$ . En effet, soit  $\sigma$  une permutation telle que  $\text{inv}(\sigma) = \binom{n}{2} - n(\lambda^t)$ . D'après le lemme 6.5, et comme le point  $(1, \sigma(1))$  est un point saillant supérieur gauche de  $\sigma$ , alors l'ensemble  $S_g^+(\hat{\sigma})$  de tous les points saillants supérieurs gauches de la permutation  $\sigma$  peut être représenté par la figure 6.5 ci-dessous.

En effet  $S_g^+(\hat{\sigma}) = \{m_1, \dots, m_{c_1}\}$  où  $c_1 \geq 1$ , est un ensemble de points de  $\hat{\sigma}$  formant une chaîne  $\{m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_{c_1}\}$  pour l'ordre naturel (remarquons que  $m_1 = (1, \sigma(1))$ ), tel que

$$\begin{aligned} O_g^+(\hat{\sigma}) &= O_g^+\{m_1, \dots, m_{c_1}\} \\ &= \bigcup_{i=1}^{c_1} O_g^+(m_i). \end{aligned}$$



**Figure 6.5** Analyse des points non-saillants.

Ainsi pour tout  $1 \leq i \leq c_1 - 1$ , les points  $m_i$  et  $m_{i+1}$  sont deux points saillants supérieurs gauches consécutifs de  $\sigma$ . Par conséquent et d'après le lemme 6.5,

$$\begin{aligned} m_2 &= (1 + 1, \sigma(1) + 1) \\ &= (2, \sigma(1) + 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_3 &= (2 + 1, (\sigma(1) + 1) + 1) \\ &= (3, \sigma(1) + 2). \end{aligned}$$

En général, pour tout  $1 \leq i \leq c_1$

$$\begin{aligned} m_i &= (i, \sigma(1) + (i - 1)) \\ &= (i, \sigma(1) + i - 1). \end{aligned}$$

Sur la figure 6.5 ci-dessus, on peut vérifier que :

- les régions  $b$  ne contiennent pas de point de la permutation  $\sigma$  car  $\sigma$  est une permutation et donc  $\hat{\sigma}$  est une quasi-permutation, i.e.  $\hat{\sigma}$  est une partie finie de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  ayant au plus un point par ligne et par colonne.
- la région  $c$  ne contient pas de point de la permutation  $\sigma$  car sinon la région  $a$  ne pourrait pas contenir les points saillants supérieurs gauches de  $\sigma$ . En effet, si  $m$  est un point de la permutation  $\sigma$  dans la région  $c$ , alors les points dans la région  $a$  seront contenus dans l'ombre supérieur gauche de  $m$  et donc tous les points de la région  $a$  ne pourront pas être des points saillants supérieurs gauches de la permutation  $\sigma$ .

- les régions  $d$  ne contiennent pas de point de la permutation  $\sigma$  car autrement il y aurait d'autres points saillants supérieurs gauches dans ces régions. En effet, la région  $a$  contient tous les points saillants supérieurs gauches de la permutation  $\sigma$ .

Donc tous les points non-saillants de la permutation  $\sigma$  sont dans la région  $e$ . Comme l'ensemble des points de la permutation  $\sigma$  dans la région  $a$  est l'ensemble  $\{m_1, \dots, m_{c_1}\}$  et comme l'ensemble des points de la permutation  $\sigma$  dans la région  $e$  est l'ensemble  $\hat{\sigma} \setminus \{m_1, \dots, m_{c_1}\}$  et comme  $\hat{\sigma}$  est une quasi-permutation, alors forcément

$$\begin{aligned} m_{c_1} &= (c_1, \sigma(1) + c_1 - 1) \\ &= (c_1, n), \end{aligned}$$

ce qui implique que  $\sigma(1) + c_1 - 1 = n$ , i.e.  $\sigma(1) = n - c_1 + 1$ . Ainsi

$$S_g^+(\hat{\sigma}) = \{m_1, \dots, m_{c_1}\},$$

avec

$$m_i = (i, n - c_1 + i), \text{ pour tout } 1 \leq i \leq c_1,$$

i.e.

$$\begin{aligned} m_1 &= (1, n - c_1 + 1), \\ m_2 &= (2, n - c_1 + 2), \\ &\vdots \\ m_{c_1-1} &= (c_1 - 1, n - 1), \\ m_{c_1} &= (c_1, n). \end{aligned}$$

En itérant ce raisonnement aux points de la région  $e$ , on démontre le théorème 6.1. En effet, En supprimant les points  $m_1, \dots, m_{c_1}$ , on obtient que la restriction de  $\sigma$  à  $\{c_1 + 1, \dots, n\}$  est une bijection de l'ensemble  $\{c_1 + 1, \dots, n\}$  vers l'ensemble  $\{1, \dots, n - c_1\}$  qu'on va noter encore par  $\sigma$ . Ainsi la nouvelle quasi-permutation  $\hat{\sigma}$  est un ensemble de points contenu dans  $\{c_1 + 1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n - c_1\}$ . En faisant une translation horizontale vers la gauche, on peut identifier  $\{c_1 + 1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n - c_1\}$  à l'ensemble  $[n - c_1] \times [n - c_1]$  et par la suite identifier la nouvelle bijection  $\sigma$  à une permutation de l'ensemble  $[n - c_1]$ . Cette nouvelle permutation  $\sigma$  vérifie aussi la condition 6.1 citée ci-dessus. En effet, il suffit de montrer qu'elle vérifie

$$\text{inv}(\sigma) = \binom{n - c_1}{2} - n \left( (\lambda')^t \right)$$

où  $\lambda'$  est un partage de l'entier  $(n - c_1)$  obtenu du partage  $\lambda$  en supprimant la part  $c_1$ , i.e.  $\lambda' = (\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_p)$  où  $j$  est un entier dans  $[p]$  tel que  $\lambda_j = c_1$ . Remarquons que si  $\lambda^t = (\lambda_1^t, \dots, \lambda_k^t)$ , alors forcément  $\lambda_k^t \geq c_1$ , i.e.  $k \geq j$  et

$$(\lambda')^t = (\lambda_1^t - 1, \lambda_2^t - 1, \dots, \lambda_j^t - 1, \lambda_{j+1}^t, \lambda_{j+2}^t, \dots, \lambda_k^t),$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} n \left( (\lambda')^t \right) &= \binom{\lambda_1}{2} + \dots + \binom{\lambda_{j-1}}{2} + \binom{\lambda_{j+1}}{2} + \dots + \binom{\lambda_p}{2} \\ &= \left( \sum_{i=1}^p \binom{\lambda_i}{2} \right) - \binom{\lambda_j}{2} \\ &= n(\lambda^t) - \binom{c_1}{2}. \end{aligned}$$

En effet, le nombre de points de  $Rot(\sigma)$  dans la région  $b$ , située à droite de la région  $a$ , est

$$c_1(n - c_1),$$

car tous les points de l'ensemble  $\{c_1 + 1, \dots, n\} \times \{n - c_1 + 1, \dots, n\}$  sont des points de  $Rot(\sigma)$ . Ainsi la nouvelle permutation  $\sigma$  vérifie

$$\begin{aligned} \text{inv}(\sigma) &= \left( \binom{n}{2} - n(\lambda^t) \right) - c_1(n - c_1) \\ &= \frac{n(n-1)}{2} - c_1(n - c_1) - \sum_{i=1}^p \binom{\lambda_i}{2} \\ &= \frac{n^2 - 2c_1n + c_1^2 - n + c_1^2}{2} - \sum_{i=1}^p \binom{\lambda_i}{2} \\ &= \frac{(n - c_1)^2 + c_1^2 - n + c_1 - c_1}{2} - \sum_{i=1}^p \binom{\lambda_i}{2} \\ &= \frac{(n - c_1)^2 - (n - c_1)}{2} + \frac{c_1^2 - c_1}{2} - \sum_{i=1}^p \binom{\lambda_i}{2} \\ &= \frac{(n - c_1)((n - c_1) - 1)}{2} + \frac{c_1(c_1 - 1)}{2} - \sum_{i=1}^p \binom{\lambda_i}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{inv}(\sigma) &= \binom{n-c_1}{2} + \binom{c_1}{2} - \sum_{i=1}^p \binom{\lambda_i}{2} \\
&= \binom{n-c_1}{2} - \left( \sum_{i=1}^p \binom{\lambda_i}{2} - \binom{c_1}{2} \right) \\
&= \binom{n-c_1}{2} - n \left( (\lambda')^t \right).
\end{aligned}$$

Donc en faisant le même raisonnement et en supposons que le nouveau ensemble  $S_g^+(\hat{\sigma}) = \{m_{c_1+1}, \dots, m_{c_1+c_2}\}$  avec  $m_{c_1+1} \leq \dots \leq m_{c_1+c_2}$  et  $c_2 \geq 1$ , on obtient

$$m_{c_1+i} = (c_1 + i, n - c_1 - c_2 + i), \text{ pour tout } 1 \leq i \leq c_2,$$

i.e.

$$\begin{aligned}
m_{c_1+1} &= (c_1 + 1, n - c_1 - c_2 + 1), \\
m_{c_1+2} &= (c_1 + 2, n - c_1 - c_2 + 2), \\
&\vdots \\
m_{c_1+c_2} &= (c_1 + c_2, n - c_1).
\end{aligned}$$

Donc, En supprimant les points  $m_1, \dots, m_{c_1}, m_{c_1+1}, \dots, m_{c_1+c_2}$ , on obtient que la restriction de  $\sigma$  à  $\{c_1 + c_2 + 1, \dots, n\}$  est une bijection de l'ensemble  $\{c_1 + c_2 + 1, \dots, n\}$  vers l'ensemble  $\{1, \dots, n - c_1 - c_2\}$  qu'on va noter encore par  $\sigma$ . Ainsi la nouvelle quasi-permutation  $\hat{\sigma}$  est un ensemble de points contenu dans

$$\{c_1 + c_2 + 1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n - c_1 - c_2\}$$

En faisant une translation horizontale vers la gauche, on peut identifier l'ensemble  $\{c_1 + c_2 + 1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n - c_1 - c_2\}$  à l'ensemble  $[n - c_1 - c_2] \times [n - c_1 - c_2]$  et par la suite identifier la nouvelle bijection  $\sigma$  à une permutation de l'ensemble  $[n - c_1 - c_2]$ . cette nouvelle permutation  $\sigma$  vérifie aussi la condition 6.1 citée ci-dessus. En itérant ce raisonnement jusqu'à ce qu'on supprime tous les points de  $\hat{\sigma}$ .

En somme, on a

$$\hat{\sigma} = \{m_1, \dots, m_{c_1}, m_{c_1+1}, \dots, m_{c_1+c_2}, \dots, m_{c_1+c_2+\dots+c_{k-1}+1}, \dots, m_{c_1+c_2+\dots+c_k}\},$$

avec  $(c_1, c_2, \dots, c_k)$  une composition de l'entier  $n$ , i.e.  $c_1 + c_2 + \dots + c_k = n$  et

$$\begin{aligned}
m_i &= (i, n - c_1 + i) \text{ si } 1 \leq i \leq c_1, \\
m_{c_1+i} &= (c_1 + i, n - c_1 - c_2 + i) \text{ si } 1 \leq i \leq c_2, \\
m_{c_1+c_2+i} &= (c_1 + c_2 + i, n - c_1 - c_2 - c_3 + i) \text{ si } 1 \leq i \leq c_3,
\end{aligned}$$

et en général, pour tout  $1 \leq p \leq k$

$$m_{c_1+\dots+c_p+i} = (c_1 + \dots + c_p + i, n - c_1 - \dots - c_p - c_{p+1} + i) \text{ si } 1 \leq i \leq c_{p+1}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma(1) \sigma(2) \dots \sigma(n) \\ &= \underbrace{\sigma(1) \dots \sigma(c_1)}_{(n-c_1+1)(n-c_1+2) \dots n} \underbrace{\sigma(c_1+1) \dots \sigma(c_1+c_2)}_{(n-c_1-c_2+1)(n-c_1-c_2+2) \dots (n-c_1) \dots} \\ &= \underbrace{(n-c_1+1)(n-c_1+2) \dots n}_{(n-c_1-\dots-c_{k-1}+1) \dots (n-c_1-\dots-c_{k-2})} \underbrace{12 \dots (n-c_1-\dots-c_{k-1})}_{(n-c_1-\dots-c_{k-1})} \\ &= \underbrace{[(n-c_1-\dots-c_{k-1}) \dots 21 (n-c_1-\dots-c_{k-2}) \dots (n-c_1-\dots-c_{k-1}+1)]}_{\dots (n-c_1)(n-c_1-1) \dots (n-c_1-c_2+1) n(n-1) \dots (n-c_1+1)}^* \\ &= \underbrace{[c_k \dots 21 (c_k+c_{k-1}) ((c_k+c_{k-1})-1) \dots (c_k+1)]}_{\dots (c_k+\dots+c_2) \dots (c_k+\dots+c_3+1) n(n-1) \dots ((c_k+\dots+c_2)+1)}^* \\ &= (\sigma_{(c_k, c_{k-1}, \dots, c_2, c_1)})^* \\ &= (\sigma_c)^*, \end{aligned}$$

où  $c = (c_k, c_{k-1}, \dots, c_1)$  est une composition de l'entier  $n$ .

Par conséquent, toutes les permutations maximales sont de type  $(\sigma_c)^*$  où  $c$  est une composition de l'entier  $n$ .

## CONCLUSION

Il n'y a pas dans la littérature mathématique de lien entre la notion de longueur d'une permutation (le nombre d'inversions) et la transformation de Robinson-Schensted ; exception faite d'un théorème de Hohlweg, qui caractérise les permutations de longueur minimale et les permutations de longueur maximale dans un tapis donné (la forme d'une permutation  $\sigma$  est la forme commune des deux tableaux de Young standards  $P(\sigma)$  et  $Q(\sigma)$  associés à  $\sigma$  par la correspondance de Robinson-Schensted et un tapis est l'ensemble de toutes les permutations de même forme), dont une preuve combinatoire a été donnée par Han. Ce travail a été consacrée à cette preuve combinatoire.

Plus précisément, dans le cadre de ce travail de recherche à la maîtrise, nous avons étudié l'ensemble des permutations de longueur minimale et les permutations de longueur maximale dans un tapis donné.

Les permutations minimales et maximales ont été le thème principal de ce travail et cette étude s'est appuyé essentiellement sur l'article intitulé "Note on the minimal permutations" publié en 2004 par Guo-Niu Han dans *European Journal of Combinatorics*.

Nous avons commencé ce travail par un résumé des résultats connus : les tableaux de Young standards, la formule des équerres et quelques rappels sur les permutations et en particulier les inversions et le diagramme de Rothe d'une permutation qui permet de visualiser les inversions. Nous avons donné aussi des rappels sur les différentes représentations du groupe symétrique.

Ensuite, nous avons donné des rappels sur l'algorithme de Robinson-Schensted ainsi que ses multiples propriétés. Il existe plusieurs versions de cet algorithme ; nous avons donné celle utilisant l'insertion ligne. Cet algorithme a été introduit en 1938 par Robinson ; il permet d'associer de manière bijective à toute permutation de  $n$  éléments une paire  $(P, Q)$  de tableaux de Young standards de même forme sur  $n$  éléments. Cette bijection est redécouverte, vers les années soixante, sous une forme un peu différente par Schensted et elle est maintenant devenue classique sous le nom de correspondance de Robinson-Schensted. Elle fut l'objet d'une étude approfondie et diverses propriétés combinatoires spectaculaires ont été mises en évidence depuis.



Par ailleurs, nous avons donné une description complète de l'algorithme de Viennot ainsi que son explication naturelle pour quelques propriétés de la correspondance de Robinson-Schensted. L'algorithme de Viennot a donné une version géométrique de la correspondance de Robinson-Schensted, la rendant symétrique. Cette version géométrique a été une nouvelle approche, qui a fourni un cadre naturel à toutes les propriétés classiques de la correspondance précédente. Elle a permis de mieux comprendre certaines propriétés.

À l'aide de la théorie de Kazhdan-Lusztig, Hohlweg a caractérisé les permutations ayant le nombre d'inversions minimal dans un tapis donné. Il a montré que l'ensemble de ces permutations est l'ensemble des permutations qui ont un nombre d'inversions maximal dans les sous-groupes de Young conjugués. Il a aussi donné une interprétation de cet ensemble en utilisant des tableaux particuliers ainsi que l'ensemble des permutations ayant le nombre d'inversions maximal dans un tapis donné. Le résultat de Hohlweg est le premier résultat qui relie la correspondance de Robinson-Schensted avec la longueur d'une permutation (le nombre d'inversions). La preuve donnée n'est cependant pas combinatoire.

Guo-Niu Han a montré, par un argument purement combinatoire, que la caractérisation de Hohlweg des permutations minimales est une conséquence de l'algorithme géométrique que Viennot avait construit pour la correspondance de Robinson-Schensted. Nous avons donné une preuve détaillée de ce principal résultat.

Dans ce mémoire de maîtrise, nous avons montré, par un argument combinatoire très similaire à celui de Guo-Niu Han, que la caractérisation de Hohlweg pour les permutations maximales est aussi une conséquence de l'algorithme géométrique de Viennot. Cette construction, qui est une variante de celle de Han, est originale.

Ce mémoire nous a permis d'acquérir une plus grande compréhension de plusieurs notions en combinatoire : la correspondance de Robinson-Schensted, la construction géométrique de Viennot, l'évacuation de Schützenberger, opération subtile qui permet de calculer les tableaux associés au conjugué d'une permutation par la permutation de longueur maximale et les permutations minimales et maximales dans un tapis.

## BIBLIOGRAPHIE

- Ariki, S. 2000. « Robinson-Schensted correspondence and left cells ». Combinatorial methods in representation theory (Kyoto, 1998), Adv. Stud. Pure Math., **28**, p.1-20.
- Bergeron, F. 2001. *Combinatoire algébrique*. Cours spéciaux de l'UQAM, LACIM, Montréal, Maîtrise et Doctorat, Version du 8 avril 2001.
- Billey, S., et V. Lakshmibai. 2000. « Singular loci of Schubert Varieties ». Progress in Math, Birkhäuser, **182**.
- Blessenohl, D., et A. Jöllenbeck. 1999. « Variation über ein Thema von Knuth, Robinson, Schensted und Schützenberger ». Proc. ALCOMA 1999, Gössweintin, Germany, p.55-66.
- Curtis, C. W., et I. Reiner. 1966. « Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras ». Pure and Applied Science, Vol. 11, Wiley-Interscience, New York, NY.
- Deodhar, V. V. 1985. « Local Poincaré duality and non-singularity of Schubert Varieties ». Comm. Algebra, **13**, p.1379-1388.
- Frame, J. S., B. Robinson et R. M. Trall. 1954. « The hook graphs of the symmetric group ». Canad. J. Math., **6**, 316-325.
- Foata, D., et M. P. Schützenberger. 1978. « Major index and inversion number of permutations ». Math. Nachr. **83**, 143-159.
- Greene, C. 1974. « An extension of Schensted's theorem ». Advances in Math., **14**, 254-265.
- Geck, M., et G. Pfeiffer. 2000. « Characters of Finite Coxeter Groups and Iwahori-Hecke Algebras ». London Math. Soc. Mon. New Series, **21**.
- Greene, C., A. Nijenhuis et H. S. Wilf. 1979. « A probabilistic proof of a formula for the number of Young tableaux of a given shape ». Adv. in Math., **31**, 104-109.
- Han, G-N. 2004. « Note on the minimal permutations ». European Journal of Combinatorics., **26**, 245-249.
- Hohlweg, Ch. 2005. « Minimal and maximal elements in two-sided cells of  $S_n$  and Robinson-Schensted correspondance ». Discrete Mathematics., **304**, 79-87.
- Harris, J., et W. Fulton. 1985. *Representation theory : A first course*. Springer-Verlag, New York.
- Jantzen, J. C. 1983. *Einhüllende Algebren halbeinfacher Lie-Algebren*. Springer-Verlag, Berlin.

- James, G. D., et A. Kerber. 1981. *The Representation Theory of the Symmetric Group*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 16, Addison-Wesley, Reading, MA.
- Knuth, D.E. 1998. *The Art of Computer Programming*. (Second Edition), Vol. 3, Sorting and Searching, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.
- Kazhdan, D., et G. Lusztig. 1979. « Representation of Coxeter groups and Hecke algebras ». *Invent. math.*, **53**, 165-184.
- Krob, D. 1995. *Eléments de combinatoire*. Cours spéciaux de l'ENS, Paris, Magistère 1-ère année, Version 1.0.
- Lakshmibai, V., et B. Sandhya. 1990. « Criterion for smoothness of schubert varieties in  $SL(n)/B$  ». *Proc. Indiann Acad. Sci. (Math. Sci.)*, **100**, p.42-52.
- Lusztig, G. 1986. « Cells in affine Weyl groups, I ». in "Algebraic groups and Related Topics", *Advanced Studies in Pure Math.* Vol. 6, p.255-285.
- 1987. « Cells in affine Weyl groups, II ». *J. Algebra*, **109**, 536-548.
- Macdonald, I. G. 1995. *Symmetric Functions and Hall Polynomials*. 2nd edition, Oxford University Press, Oxford.
- Pak, I. 2001. « Hook length formula and geometric combinatorics ». *Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, **46**, Article B46f.
- Novelli, J. C., I. M. Pak et A. V. Stoyanovskii. 1997. « A direct combinatorial proof of the hook-length formula ». *Discrete Math. and Theor. Comp. Sci.*, **1**, 53-67.
- Robinson, G. de B. 1938. « On the representation of the symmetric group ». *American J. Math*, **60**, 746-760.
- Remmel, J. B. 1982. « Bijective Proof of Formula for the Number of Standard Young Tableaux ». *Linear and Multilinear Algebra*, **11**, 45-100.
- Schensted, C. 1961. « Longest increasing and decreasing subsequences ». *Canad. J. Math.*, **13**, 179-191.
- Sagan, B. E. 2001. *The symmetric group : Representations, Combinatorial Algorithms and Symmetric Functions*. (Second Edition), Springer, New York.
- Serre, J-P. 1978. *Représentations linéaires des groupes finis*. Troisième édition, Hermann, Paris.
- Stanley, R. P. 1997. *Enumerative Combinatorics*. Vol. 1, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- 1999. *Enumerative Combinatorics*. Vol. 2, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- Stanton, D. W., et D. E. White. 1986. *Constructive Combinatorics*. UTM, Springer-Verlag.

- Schützenberger, M. P. 1963. « Quelques remarques sur une construction de Schensted ». *Math. Scand.*, **12**, p.117-128.
- 1977. « La correspondance de Robinson ». In D. Foata (ed.), *Combinatoire et représentation du groupe symétrique : Lecture Notes in Math.*, **579**, p.59-135., Springer-Verlag, New York.
- Viennot, G. 1976. « Une forme géométrique de la correspondance de Robinson-Schensted, dans *Combinatoire et Représentation du Groupe Symétrique* ». *Lecture Notes in Mathematics*, vol. **579**, Springer-Verlag, p.29-58.
- Vogan, D. A. 1979. « A Generalized  $\tau$ -Invariant for the primitive spectrum of a Semisimple Lie Algebra ». *Math. Ann.*, **242**, p.209-224.
- Young, A. 1902. « On quantitative substitutional analysis II ». *Proc. London Math. Soc.* (1), **34**, 361-397.
- 1927. « On quantitative substitutional analysis III ». *Proc. London Math. Soc.* (2), **28**, 255-292.
- 1929. « On quantitative substitutional analysis IV ». *Proc. London Math. Soc.* (2), **31**, 253-272.
- Zeilberger, D. 1984. « A short hook-length Bijection inspired by the Greene-Nienhuis-Wilf proof ». *Discrete Math.*, **51**, 101-108.